

# Descripción y análisis del relieve

por [Angel Manuel Felicísimo](http://www.etsimo.uniovi.es/~feli/), biólogo  
<http://www.etsimo.uniovi.es/~feli/>



## Introducción

Los modelos digitales del terreno contienen información de dos tipos diferentes:

- **información explícita**, recogida en los datos concretos del atributo del modelo, como la altitud en el caso del MDE
- **información implícita**, relativa a las relaciones espaciales entre los datos, como la distancia o la vecindad

Ambos tipos de información son complementarios y permiten obtener información sobre la morfología del relieve de forma objetiva y exhaustiva. La objetividad se deriva del carácter digital de los datos y de los procesos de análisis, configurados por algoritmos. La exhaustividad se refiere a que estos procesos son aplicables a la totalidad del área analizada y no sólo a una muestra de la misma.

La medida y caracterización de las formas de terreno ha merecido atención desde hace más de 100 años (Cayley, 1859). Como podía esperarse, el desarrollo de las técnicas de medida se ha beneficiado de las técnicas de almacenamiento y representación de la información. La referencia a esta disciplina fue acuñado por Chorley *et al.* (1957) bajo el término **geomorfometría**. Posteriormente, Evans (1972) introdujo la distinción entre la **geomorfometría específica** — *specific geomorphometry*— de la **geomorfometría general** — *general geomorphometry*—. La primera trata de la distinción entre elementos geomorfológicos específicos y la segunda a la medida y análisis de la características morfológicas aplicables a cualquier superficie.

Bajo esta concepción la caracterización de las formas del relieve puede realizarse de dos formas:

- mediante **descriptores globales**, que generan información estadística sintética no representable espacialmente como, por ejemplo, medidas de dispersión, histogramas, correlogramas, etc. lo que correspondería con la geomorfometría general
- mediante **descriptores locales**, que generan información de naturaleza espacial y son representables, a su vez, como modelos digitales del terreno, lo que correspondería con la geomorfometría específica

Ambos tipos de descriptores pueden utilizarse conjuntamente para analizar y caracterizar el relieve y sus componentes. Dado que los procesos geológicos externos dejan una huella morfológica sobre las áreas afectadas, el MDE y sus modelos derivados pueden ser un instrumento de análisis objetivo de potencial utilidad.

# Las variables topográficas

La descripción del relieve a partir del MDE se realiza mediante un conjunto de medidas que definen características geométricas del terreno a diferentes escalas. Este proceso se conoce como **parametrización del relieve**: generación un conjunto de medidas que describen las formas topográficas permitiendo distinguir diferentes tipos de relieve o, en resumen, la **descripción numérica de formas topográficas**. Los parámetros pueden ser descriptores globales o locales pero los primeros informan únicamente sobre el conjunto del MDE por lo que son más útiles para la comparación de modelos de diferentes zonas. Los descriptores locales aportan un conjunto de datos que puede ser analizado con el mismo nivel de resolución que el MDE original.

La parametrización del relieve debe cumplir algunas condiciones para ser útil:

- los parámetros deben tener relación con los procesos geomorfológicos que modelan el relieve
- el conjunto de parámetros no debe proporcionar información redundante, es decir, deben medir características distintas
- la parametrización debe incluir información sobre la influencia de la escala ya que existen parámetros cuya magnitud depende de la resolución del muestreo y, por tanto, de la escala de trabajo

Existen varias propuestas sobre las variables que deben incluirse en la parametrización del relieve. Entre ellas, la menos discutida es la **pendiente**, aunque también son usadas con frecuencia en geomorfología la **orientación y la curvatura** (Weibel y Heller, 1991:283). Franklin y Peddle (1987:294) mencionan cinco parámetros básicos en este contexto: **elevación, pendiente, orientación, convexidad y relieve**. El relieve, definido en este caso como la variabilidad de la superficie, es lo que otros autores denominan **rugosidad**. En Mark (1975) puede encontrarse una revisión del estado del tema en los momentos previos al tratamiento informático, donde se analizan las relaciones entre diversos parámetros mediante análisis de correlación.

Todas estas variables pueden ser representadas como modelos digitales derivados con la misma resolución que el MDE original. Como veremos, esta circunstancia permitirá posteriormente el análisis multivariable del relieve, teniendo en cuenta simultáneamente la totalidad de los descriptores topográficos.

## El gradiente topográfico

En un modelo digital de elevaciones, la altitud en el entorno inmediato de un punto puede describirse de forma aproximada mediante un plano de ajuste, cuya expresión es:

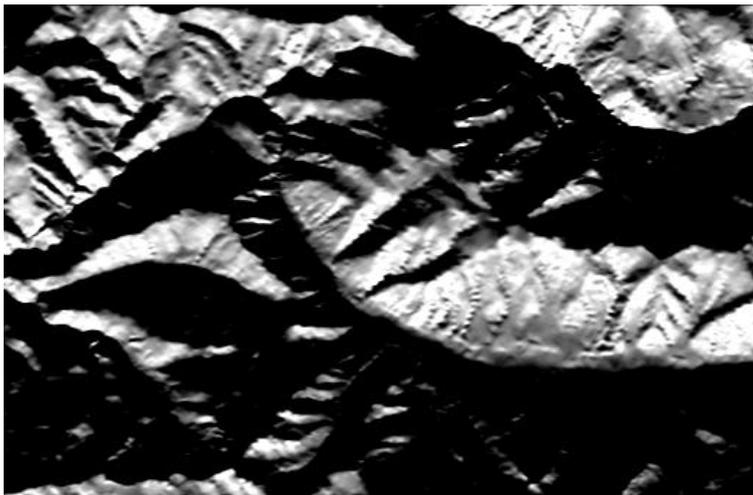
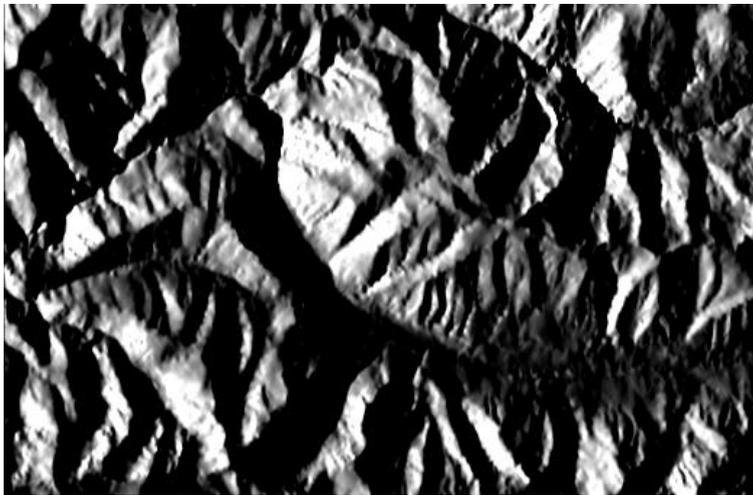
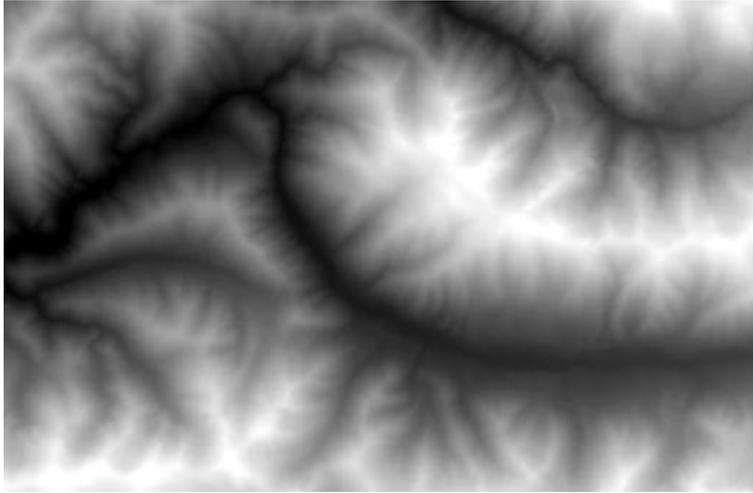
$$z = a_{00} + a_{10} \cdot x + a_{01} \cdot y$$

Se deduce directamente que los coeficientes  $a_{10}$  y  $a_{01}$  representan las derivadas primeras de la altitud con respecto a los ejes  $X$  e  $Y$ :

$$a_{10} = \frac{\partial z}{\partial x}; \quad a_{01} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Los coeficientes  $a_{10}$  y  $a_{01}$  representan la tasa de cambio de la altitud respecto a los ejes  $X$  —filas— e  $Y$  —columnas— respectivamente, es decir, los componentes de la pendiente sobre los ejes  $X$ ,  $Y$ .

El par de valores  $(a_{10}, a_{01})$  se denomina *gradiente* de  $z$  en el punto  $(x,y)$  y ha sido mencionado porque va a mostrarse útil en el cálculo de los modelos digitales derivados.



**Modelo digital de elevaciones y los componentes del gradiente. La figura superior derecha muestra la componente direccional en el sentido E-O y la inferior la correspondiente al sentido S-N. La zona es el valle de Degaña, en la montaña suroccidental de Asturias.**

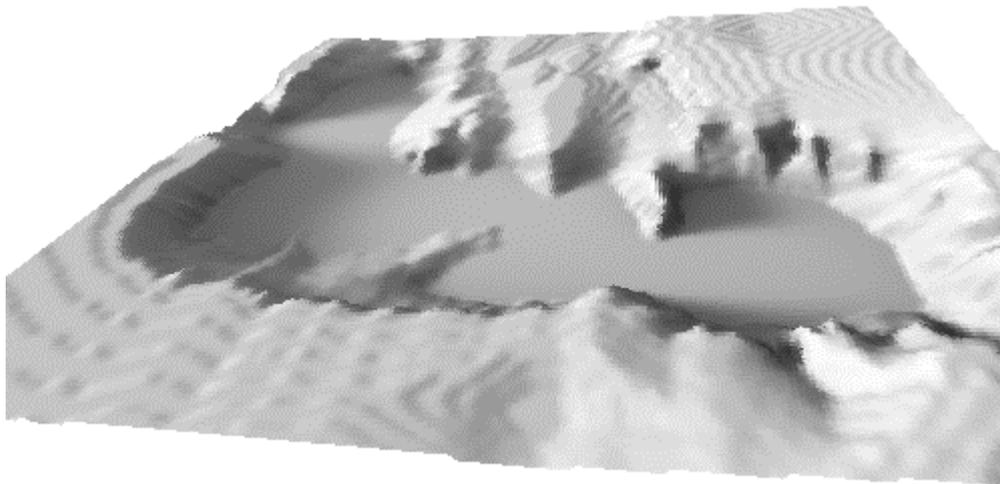
En las aplicaciones sobre MDE matriciales, las estimaciones de los coeficientes del gradiente se realizan mediante operadores que se aplican sobre un entorno definido del punto problema. Para un punto situado en la fila  $i$ , columna  $j$ , donde  $d$  es la distancia entre filas y columnas, los valores

del gradiente se calculan a partir de los cambios de altitud entre puntos vecinos. La opción más simple utiliza los 4 vecinos más próximos:

$$a_{10} = \frac{z_{i,j+1} - z_{i,j-1}}{2 \cdot d}; a_{01} = \frac{z_{i-1,j} - z_{i+1,j}}{2 \cdot d}$$

Sobre el cálculo empírico del gradiente en los MDE, Jones *et al.* (1988:674) destacan la relación existente entre los valores del gradiente y la precisión de los datos de altitud. El análisis de los componentes del gradiente revela frecuentemente la discontinuidad de sus distribuciones. Este error se manifiesta posteriormente en el "aterrazamiento" de algunos modelos derivados: las pendientes en las laderas se muestran en escalones, con cinturones planos separados por otros de pendiente más elevada. Esta circunstancia puede deberse a dos causas:

- si el aterrazamiento se muestra solamente en las zonas de baja pendiente, puede deberse a un agrupamiento en clases de los valores del MDE—por ejemplo, de 10 m—, con lo que se pierde el carácter continuo de la variable. En zonas críticas debe cuidarse incluso el truncamiento de las altitudes a números enteros
- si el aterrazamiento es un fenómeno global, se ha construido el MDE a partir de contornos sin generalizar y el método de interpolación ha tratado como datos independientes los puntos de los contornos



**Simulación donde se aprecia el peso excesivo de las curvas de nivel en los métodos de construcción del MDE y que se refleja en la aparición de "terrazas" claramente visibles en las zonas de menor pendiente.**

Para reducir el error derivado de la posible discretización de las distribuciones del gradiente, Jones *et al.* (1988:674) recomiendan el uso de los 8 datos más próximos al punto problema. El cálculo se realiza en este caso mediante operadores de dimensión [3x3], denominados **operadores de Prewit y de Sobel** (James, 1988:45). El operador de Prewit coincide con el método propuesto por Sharpnack y Akin (1988:248) y utilizado en el sistema de información geográfica [Erdas™](#) (Erdas, 1991:15) y responde a las expresiones siguientes:

$$a_{10} = \frac{(z_{i-1,j+1} + z_{i,j+1} + z_{i+1,j+1}) - (z_{i-1,j-1} + z_{i,j-1} + z_{i+1,j-1})}{6 \cdot d}$$

$$a_{01} = \frac{(z_{i-1,j-1} + z_{i-1,j} + z_{i-1,j+1}) - (z_{i+1,j-1} + z_{i+1,j} + z_{i+1,j+1})}{6 \cdot d}$$

El operador de Sobel es el utilizado en [Arc/Info™](#) y refuerza el peso de los datos más próximos al punto problema:

$$a_{10} = \frac{(z_{i-1,j+1} + z_{i,j+1} + z_{i+1,j+1}) - (z_{i-1,j-1} + z_{i,j-1} + z_{i+1,j-1})}{6 \cdot d}$$

$$a_{01} = \frac{(z_{i-1,j-1} + 2 \cdot z_{i-1,j} + z_{i-1,j+1}) - (z_{i+1,j-1} + 2 \cdot z_{i+1,j} + z_{i+1,j+1})}{8 \cdot d}$$

Lógicamente, en los bordes del modelo se necesitan tratamientos especiales. Si se trata de la primera fila o columna de un MDE se utilizan las siguientes expresiones (Dozier y Strahler, 1983:963):

$$a_{10|j=1} = \frac{-3 \cdot z_{i,1} + 4 \cdot z_{i,2} - z_{i,3}}{2 \cdot d}$$

$$a_{01|i=1} = \frac{-3 \cdot z_{1,j} + 4 \cdot z_{2,j} - z_{3,j}}{2 \cdot d}$$

Si se trata de la última fila o columna de un total de  $n$ :

$$a_{10|j=n} = \frac{z_{i,n-2} - 4 \cdot z_{i,n-1} + 3 \cdot z_{i,n}}{2 \cdot d}$$

$$a_{01|i=n} = \frac{z_{n-2,j} - 4 \cdot z_{n-1,j} + 3 \cdot z_{n,j}}{2 \cdot d}$$

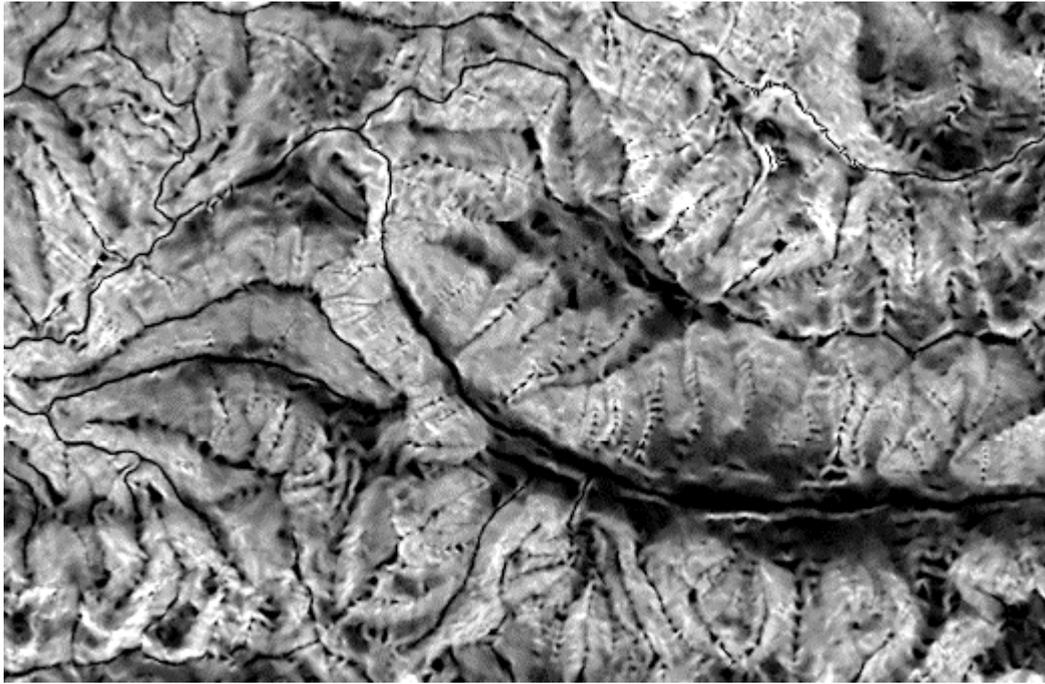
Algunos programas no usan estos algoritmos para los valores extremos sino que optan por unas vías más simples. Una de ellas es copiar el resultado del gradiente de la fila o columna vecina; la segunda es añadir una fila o columna temporales y duplicar los valores de altitud de las vecinas para calcular posteriormente el gradiente.

## La pendiente

La pendiente en un punto del terreno se define como el ángulo existente entre el vector normal a la superficie en ese punto y la vertical. Es demostrable (Felicísimo, 1994:102, Wood, 1996, Ap. 4.2.1) que la pendiente  $\gamma$  puede calcularse a partir de los componentes del gradiente mediante la expresión:

$$\gamma = \text{tg}^{-1} \sqrt{a_{10}^2 + a_{01}^2}$$

Dada la expresión del gradiente, el valor de  $\gamma$  refleja la pendiente media en el entorno utilizado para calcular los componentes  $a_{10}$  y  $a_{01}$ . La expresión anterior es la más utilizada en la práctica en el tratamiento de los modelos matriciales (Papo y Gelbman, 1984:698; Franklin, 1987a:604; Erdas, 1991:15) pero para el cálculo de la pendiente existe un buen número de alternativas cuyas ventajas y problemas deben evaluarse en cada caso y para cada aplicación.



**Modelo digital de pendientes del valle de Degaña. Las zonas planas se representan en tonos oscuros y las más inclinadas en tonos claros. El original se construyó con Erdas.**

Los métodos más habituales se clasifican en función del número de puntos que intervienen en el cálculo:

Con dos puntos:

- pendiente máxima al vecino más próximo, para lo cual se calcula la pendiente local entre en punto problema y sus vecinos; es el algoritmo más rápido, no da una medida de la orientación y propone los valores de pendiente más elevados. [Idrisi](#) (Eastman, 1992:181) utiliza este método limitado a los 4 vecinos más próximos. [MicroDEM](#) lo utiliza con los 8 vecinos ponderando la distancia en diagonal —la luz de malla por la raíz cuadrada de 2—.

En este último caso:

$$\gamma = \max \left[ \operatorname{tg}^{-1} \frac{z_{i+m,j+n} - z_{i,j}}{d} \right] \text{ donde } \begin{matrix} m = (-1,0,+1) \\ n = (-1,0,+1) \end{matrix} \text{ y } d = \begin{matrix} 1 & \text{si } m \cdot n = 0 \\ \sqrt{2} & \text{si } m \cdot n \neq 0 \end{matrix}$$

Con tres puntos:

- O'Neill y Mark (1987) proponen el uso del punto problema y de los vecinos Norte y Este para definir un plano. La pendiente de éste se asigna al punto problema. La selección de los vecinos mencionados es arbitraria y cambiarlos puede modificar el resultado tanto de la pendiente como de la orientación. La formulación sería equivalente a la expresión general, donde los componentes del gradiente son locales:

$$\gamma = \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{(z_{i,j+1} - z_{i,j})^2 + (z_{i+1,j} - z_{i,j})^2}$$

Con cuatro puntos:

- utiliza los valores del gradiente calculados con los 4 vecinos más próximos, lo que equivale a estimar la pendiente del plano de ajuste a estos puntos. El punto problema no interviene en el cálculo.

Con ocho puntos:

- Sharpnack y Akin (1988:248) proponen el operador de Prewitt para estimar la pendiente, con lo que los ocho vecinos tienen el mismo peso en el cálculo del gradiente. Es el método usado en [Erdas](#)<sup>TM</sup>. El punto problema no tiene influencia en la pendiente.
- Horn (1981) usa el operador de Sobel, que pondera más los 4 vecinos más próximos que los situados en las diagonales. Es el método usado en [Arc/Info](#)<sup>TM</sup> y el punto problema tampoco interviene en el cálculo

El uso de cualquiera de los métodos anteriores debe valorarse en función del tipo de aplicación a desarrollar posteriormente. Los algoritmos basados en la pendiente local tienen a su favor que no introducen suavización en los datos como los basados en 4 y 8 puntos. El uso de sólo 4 vecinos no tiene justificación aparente y parece más adecuada la búsqueda de pendiente máxima con la totalidad de vecinos con control de la distancia en el caso de las diagonales. Los métodos basados en operadores de Prewitt y Sobel son menos sensibles al error en el MDE ya que, al intervenir un número elevado de puntos, las posibles desviaciones individuales pierden peso y pueden compensarse parcialmente entre ellas. En estos últimos, sin embargo, la altitud del punto problema no interviene en los datos por lo que la información del mismo se desaprovecha.

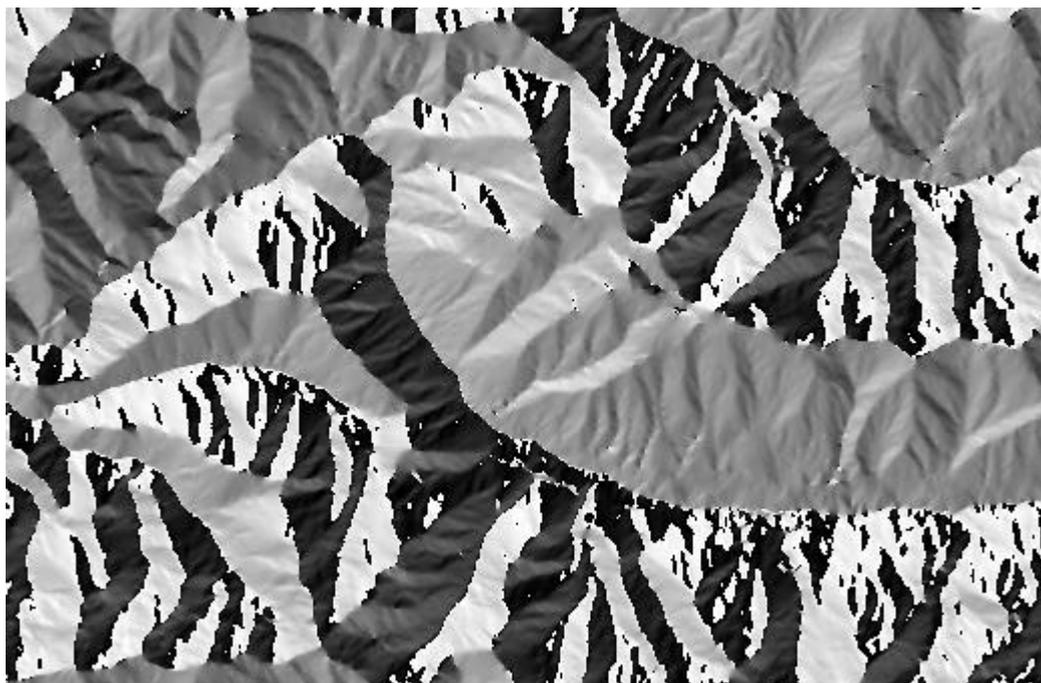
## La orientación

La orientación en un punto puede definirse como el ángulo existente entre el vector que señala el Norte y la proyección sobre el plano horizontal del vector normal a la superficie en ese punto.

Como en el caso de la pendiente, el valor de orientación se estima directamente a partir de los valores del gradiente:

$$\phi = \tan^{-1}(a_{10}/a_{01})$$

La discusión sobre las formas de valorar la orientación son similares a las planteadas con la pendiente.



Modelo digital de orientaciones del valle de Degaña. La orientación es una variable de distribución circular que se ha codificado en tonos de gris desde el Norte (negro), aclarándose progresivamente en sentido horario. Las orientaciones al Sur están representadas en tonos gris-medio.

## La curvatura

La curvatura en un punto,  $\eta$ , puede definirse como la tasa de cambio en la pendiente y depende, por tanto, de las derivadas de segundo grado de la altitud —es decir, de los cambios de pendiente en el entorno del punto—.

Para el cálculo de la derivadas de segundo grado no es posible utilizar la aproximación simple empleada en la estimación de la pendiente y orientación, basada en un plano de ajuste. En este caso se utiliza una superficie de ajuste de segundo grado de acuerdo con la expresión general:

$$z = a_{00} + a_{10} \cdot x + a_{01} \cdot y + a_{11} \cdot x \cdot y + a_{20} \cdot x^2 + a_{02} \cdot y^2$$

Para simplificar, representaremos el punto problema y sus vecinos con la notación siguiente:

$z_1$	$z_2$	$z_3$
$z_4$	$z_5$	$z_6$
$z_7$	$z_8$	$z_9$

En el caso concreto de la ventana de 3x3 centrada en el punto problema, los coeficientes de la ecuación cuadrática se calculan mediante las expresiones siguientes (Evans, 1979:29):

$$a_{00} = (2(z_2 + z_4 + z_6 + z_8) - (z_1 + z_3 + z_7 + z_9) + 5z_5) / 9$$

$$a_{10} = (z_3 + z_6 + z_9 - z_1 - z_4 - z_7) / 6d$$

$$a_{01} = (z_1 + z_2 + z_3 - z_7 - z_8 - z_9) / 6d$$

$$a_{11} = (z_3 + z_7 - z_1 - z_9) / 4d^2$$

$$a_{20} = ((z_1 + z_3 + z_4 + z_6 + z_7 + z_9) / 6d^2) - ((z_2 + z_5 + z_8) / 3d^2)$$

$$a_{02} = ((z_1 + z_2 + z_3 + z_7 + z_8 + z_9) / 6d^2) - ((z_4 + z_5 + z_6) / 3d^2)$$

Se ha planteado la medida de la curvatura de tres formas distintas. La primera es la curvatura media,  $\eta$ , donde se mide la concavidad/convexidad general de la forma definida por el punto problema y sus 8 vecinos. Una expresión simple para el cálculo ha sido propuesta por Papo (1984:697), mediante la suma de las derivadas parciales de segundo orden con respecto a los ejes X e Y, de la forma siguiente:

$$\eta = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Según el mismo autor, este método de estimación no es completamente exacto, ya que la curvatura depende de expresiones más complejas, pero presenta errores de pequeña magnitud para pendientes bajas y medias.

Las derivadas primeras de la expresión general son,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a_{10} + 2 \cdot a_{20} \cdot x + a_{11} \cdot y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = a_{01} + 2 \cdot a_{02} \cdot y + a_{11} \cdot x$$

por tanto, las segundas:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \cdot a_{20}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \cdot a_{02}$$

y, sustituyendo obtenemos que

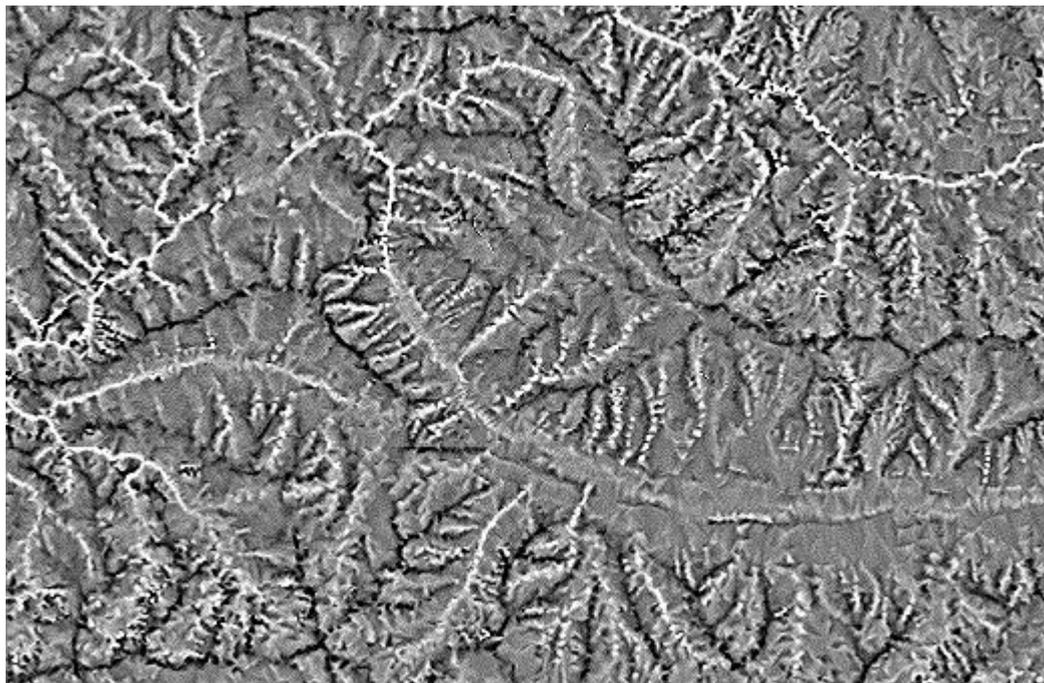
$$\eta = 2 \cdot (a_{20} + a_{02})$$

La curvatura media puede ser descompuesta en dos componentes ortogonales: la curvatura longitudinal  $\eta_L$  —*longitudinal convexity*— que mide la concavidad/convexidad en el sentido de la máxima pendiente, y la curvatura transversal  $\eta_T$  —*cross-sectional convexity*—, normal a la anterior. Wood (1996, Ap. 4.2.2) plantea las siguientes expresiones para su cálculo:

$$\eta_L = -2 \cdot \left( \frac{a_{20} \cdot a_{10}^2 + a_{02} \cdot a_{01}^2 + a_{11} \cdot a_{10} \cdot a_{01}}{a_{10}^2 + a_{01}^2} \right)$$

$$\eta_T = -2 \cdot \left( \frac{a_{02} \cdot a_{10}^2 + a_{20} \cdot a_{01}^2 - a_{11} \cdot a_{10} \cdot a_{01}}{a_{10}^2 + a_{01}^2} \right)$$

Puede observarse que sumando  $\eta_L$  y  $\eta_T$  se obtiene la misma expresión que para la curvatura general,  $\eta = -2 \cdot (a_{20} + a_{02})$ . El signo negativo se debe a una convención que asume curvatura negativa cuando existe una concavidad y curvatura positiva en caso de formas convexas.



**Modelo digital de curvatura del valle de Degaña. Las zonas cóncavas se representan en blanco y las convexas en tonos oscuros**

El problema de las expresiones de curvatura basadas en las líneas de pendiente es que pueden aparecer casos donde los coeficientes  $a_{10}$  y  $a_{01}$  son nulos aunque los otros no lo sean. Para prevenir esta circunstancia, Young (1978) propuso unas expresiones basadas en los otros coeficientes y que permiten conocer los valores de curvatura máxima y mínima independientemente de su dirección:

$$\eta_{\max} = -a_{20} - a_{02} + \sqrt{(a_{20} - a_{02})^2 + a_{11}^2}$$

$$\eta_{\min} = -a_{20} - a_{02} - \sqrt{(a_{20} - a_{02})^2 + a_{11}^2}$$

Las expresiones anteriores serán las más utilizadas para el reconocimiento de elementos morfológicos.

## La rugosidad

Al contrario de lo que ocurre con la pendiente, la orientación y la curvatura, no existen criterios uniformes para llevar a cabo la medida de la rugosidad. Diversos autores han aplicado métodos significativamente distintos para su evaluación; por ejemplo, Balce (1987:324) utiliza la pendiente media como estimador de un factor de rugosidad. Evans (1972:27-33) realiza una revisión de métodos, entre los cuales menciona desde rangos de altitud hasta la desviación estándar de la elevación en entornos limitados. Hobson (1967, 1972) propone que, dado un punto del terreno, se calculen los vectores unitarios perpendiculares a la superficie en él y en los puntos de su entorno. Si el terreno es uniforme la suma vectorial será elevada y la dispersión baja; en el caso de terrenos rugosos, con cambios en orientaciones y pendientes, la suma vectorial será pequeña y la dispersión elevada.

De acuerdo con Franklin (1987a:605), las estimaciones de la rugosidad deben ser independientes de otros parámetros del relieve para reducir la información redundante. Parece deseable, además, cierta independencia de la escala del análisis, lo cual elimina algunas aproximaciones excesivamente simples como las que usan el rango de altitud.

Una variante del método de Hobson es la siguiente:

- se calculan los vectores normales a los segmentos que conectan al punto problema y sus vecinos más próximos. Para ello se calcula la pendiente local  $\gamma_i$  y se le asigna la orientación que le corresponda  $\phi_i$ , determinada por la posición del punto. De acuerdo con la notación utilizada anteriormente:

para la pendiente

$(z_1 - z_5)/1.414d$	$(z_2 - z_5)/d$	$(z_3 - z_5)/1.414d$
$(z_4 - z_5)/d$	...	$(z_6 - z_5)/d$
$(z_7 - z_5)/1.414d$	$(z_8 - z_5)/d$	$(z_9 - z_5)/1.414d$

y para la orientación

315°	0°	45°
270°	...	90°
225°	180°	135°

- a partir de los vectores resultantes, definidos por sus valores  $(\gamma, \phi)$ , se calculan las coordenadas rectangulares del vector unitario normal a cada uno de ellos. Las expresiones son (Upton y Fingleton, 1989:312):

$$x_i = \text{sen } \gamma_i \cdot \cos \phi_i \quad y_i = \text{sen } \gamma_i \cdot \text{sen } \phi_i \quad z_i = \cos \gamma_i$$

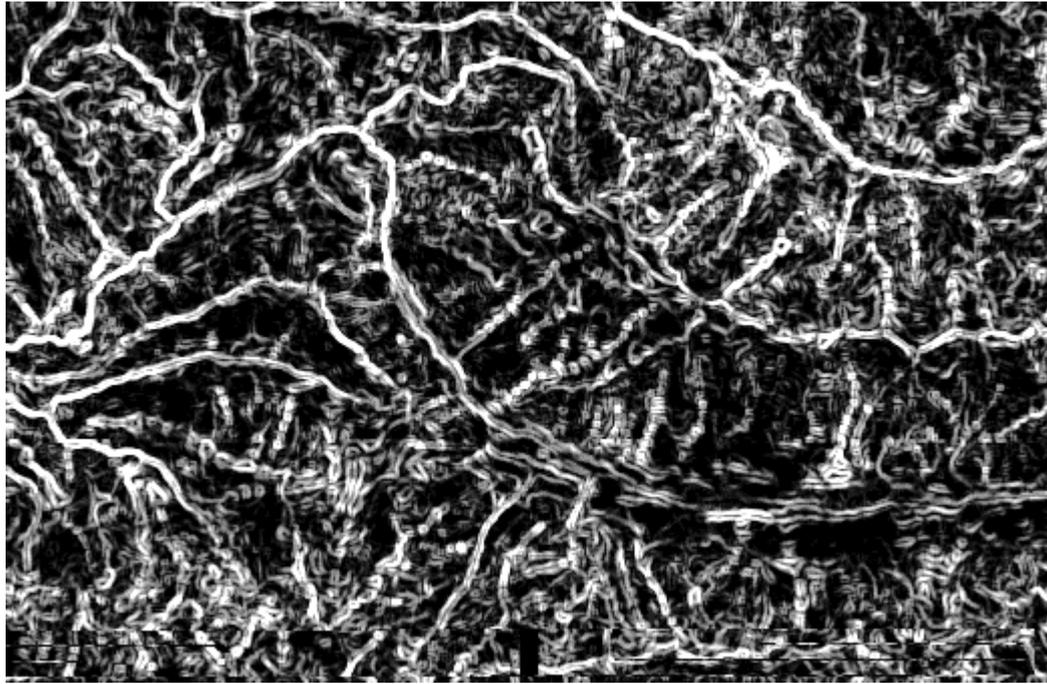
- se calcula el módulo del vector suma de los vectores unitarios,  $R$  :

$$R = \sqrt{(\sum x_i)^2 + (\sum y_i)^2 + (\sum z_i)^2}$$

- se calcula la varianza esférica,  $\mathcal{V}$ , como el complementario del módulo medio  $\bar{R}$ , que es el módulo del vector suma normalizado al dividirlo por el número de vectores unitarios (Band, 1989:286):

$$\mathcal{V} = 1 - \bar{R} = 1 - \frac{R}{n}$$

La varianza esférica tendrá el valor cero para una rugosidad nula —alineamiento completo de los vectores unitarios— y tenderá a la unidad según se incrementa la rugosidad y, consecuentemente, la dispersión de los vectores unitarios.



**Modelo digital de rugosidad del valle de Degaña, construido a partir de la desviación estándar de la pendiente. Las zonas rugosas se representan en tonos claros y las lisas en tonos oscuros**

Este método de cálculo sobre las pendientes locales basado en la varianza esférica de los vectores unitarios normales tiene la ventaja de ofrecer estimaciones de la rugosidad independientes de la escala. Al basarse en el módulo normalizado, los resultados son comparables para cualquier tamaño de ventana que se use: 8 vecinos en una de 3x3, 24 en una de 5x5, etc. Esta normalización de la escala de medida permite analizar adecuadamente las relaciones entre la rugosidad y la resolución del modelo.

## Caracterización morfométrica

Algunas formas del relieve poseen características específicas que permiten que sean reconocidas mediante los valores de las variables topográficas mencionadas en los apartados anteriores. Para el reconocimiento o clasificación de estas formas es posible utilizar métodos diversos, deterministas o estocásticos.

### Los elementos del relieve

Los elementos más destacables del relieve han sido tradicionalmente los siguientes: picos, crestas, collados, planicies, canales y pozos (Wood, 1996, Ap. 5). A estos elementos morfológicos básicos deberían ser añadidos otros como, por ejemplo, laderas; asimismo, podrían diferenciarse algunos de ellos en dos o más clases como veremos posteriormente.

La descripción genérica de los elementos básicos es la siguiente:

Elemento	Descripción
pico	convexidad en todas direcciones
cresta	convexidad en una dirección ortogonal a

	una línea sin curvatura
collado	convexidad en una dirección ortogonal a una concavidad
ladera	sin curvatura y con pendiente no nula
planicie	sin curvatura y con pendiente nula
canal	concavidad en una dirección ortogonal a una línea sin curvatura
pozo	concavidad en todas direcciones

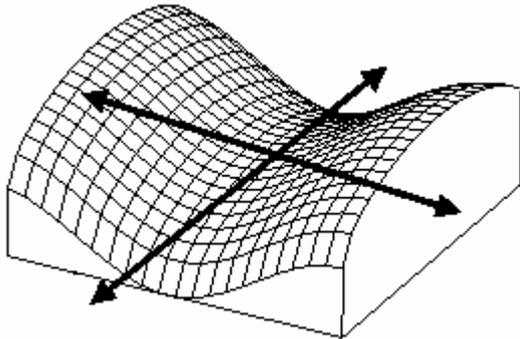
En principio, las definiciones anteriores son suficientes para caracterizar los elementos morfológicos básicos en función de pendiente  $\gamma$  y curvaturas longitudinal  $\eta_L$ , transversal  $\eta_T$ , máxima  $\eta_{MAX}$  y mínima  $\eta_{MIN}$ . La tabla de reconocimiento de los elementos sería la siguiente:

Elemento	g	$h_L$	$h_T$	$h_{MAX}$	$h_{MIN}$
pico	0			+	++
	+	+	+		
cresta	0			+	0
	+	+	0		
	+	0	+		
collado	0			+	-
	+	+	-		
	+	-	+		
ladera	+	0	0		
planicie	0			0	0
canal	0			0	-
	+	0	-		
pozo	0			-	-
	+	-	-		

Los criterios mencionados en la tabla pueden ser utilizados para una clasificación de los elementos del relieve en un MDE. Sin embargo, las reglas de decisión deben ser diseñadas con algo más de tolerancia que la mostrada en la tabla. En efecto, si una condición para definir la planicie es que la pendiente sea cero estas zonas quedarán infravaloradas ya que raramente esta

variable tomará exactamente ese valor en la realidad. Por este motivo, deberán introducirse reglas de tolerancia para los parámetros que se anulan en alguna condición.

Por ejemplo, una vez reconocida la existencia de una ladera, podría establecerse una cadena de reglas complementaria para definir subclases a partir del valor de la pendiente: bajo, medio o alto; o, permitiendo una relajación de la regla de curvatura nula, definir laderas cóncavas o convexas en función del valor de la curvatura longitudinal.



**Forma elemental en collado, donde existen dos perfiles perpendiculares respectivamente cóncavo y convexo.**

En este punto, cabe considerar la influencia de la escala de trabajo en los resultados de la caracterización. Como indica Wood (1996, Ap. 5.3), la caracterización a una única escala no es suficiente para describir la forma topográfica. Por este motivo, una clasificación basada en reglas debe incluir criterios multiescala. Una solución a este planteamiento consiste en generalizar el MDE mediante filtrados sucesivos y aplicar las reglas de decisión a cada nivel de generalización. El tipo de elemento puede variar con la escala: un canal a gran resolución puede formar parte de una ladera a resolución media y de una cresta a una escala de análisis global.

## Los métodos de clasificación

Las reglas planteadas en el apartado anterior lo han sido a priori, es decir, se plantean como condiciones establecidas partiendo de un conocimiento de las formas topográficas que se desea reconocer. Las reglas son deterministas y pueden plantearse como un árbol dicotómico donde se comprueba el cumplimiento de las condiciones: si *condición a* es cierta entonces *b*, en otro caso *c* ... etc.

Uno de los problemas planteados por las decisiones basadas en reglas es la falta de exhaustividad, es decir, que todos los elementos del MDE sean asignados a algún tipo de forma topográfica. El segundo problema es evitar la arbitrariedad en la definición de las tolerancias o relajación de las reglas de decisión.

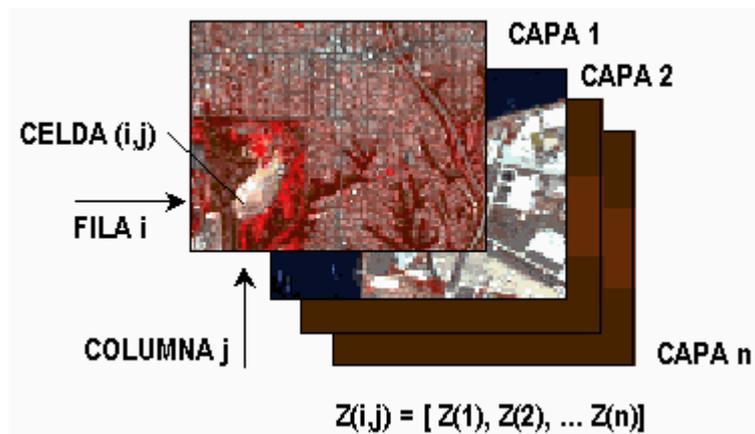
Un método alternativo posible es el uso de las técnicas utilizadas en teledetección para la clasificación de las imágenes digitales. El objetivo de estas técnicas es realizar el agrupamiento de los elementos en grupos o clases con propiedades significativamente diferentes entre sí. La aplicación de este concepto a la caracterización del relieve supone la intención de discriminar diferentes tipos de formas a partir de los datos del MDE y de los modelos derivados.

La clasificación en teledetección suele realizarse a partir de imágenes multiespectrales, consistentes en un conjunto de imágenes digitales simples que, una vez superpuestas por poseer idénticas propiedades geométricas y de referenciación geográfica, forman un conjunto de información único. Este conjunto de información es equivalente a una matriz tridimensional, en la que las filas y columnas representan la localización geográfica, mientras que la tercera dimensión representa las diferentes bandas o propiedades medidas: cada celda de la matriz ( $i, j$ ,

$k$ ) posee el valor de la variable  $k$  en la localización geográfica definida por la fila  $i$  y la columna  $j$ .

El concepto de modelo digital multivariable, MDM (Felicísimo, 1992:111) repite este mismo esquema sustituyendo las imágenes por los MDT, de forma que pueden agruparse en un mismo conjunto de datos las elevaciones (capa 1), las pendientes (capa 2), etc. El concepto de MDM es útil en el análisis de la información ya que, al ser análogo al de imagen multiespectral, facilita la aplicación de los procesos de clasificación multiespectral en el contexto de los modelos digitales del terreno. En este sentido, los puntos de MDM pueden también hacerse equivalentes a los píxeles de la imagen por lo que, a partir de ahora, ambos términos no serán diferenciados en el texto.

Siguiendo la analogía y aceptando la terminología propuesta por Pike (1988:494), se denominará *signatura geométrica* al conjunto de variables que permiten diferenciar distintos tipos de relieve. Para distinguirlos se debe caracterizar cada uno de ellos por los valores de las variables implicadas. El procedimiento es análogo al utilizado en la creación de *signaturas espectrales* en el campo de la teledetección (Schowengerdt, 1983:132) con el fin, por ejemplo, de diferenciar los tipos de cubierta vegetal en una región: la *signatura geométrica* de un píxel  $(i,j)$  es el vector  $k$ -dimensional constituido por los valores de las variables contempladas en el MDM para la localización  $(i,j)$ . De forma análoga, la *signatura geométrica* de una clase está definida por el vector de medias de las variables y complementada con los estadísticos de dispersión (desviación estándar) y la matriz de covarianzas. El proceso de clasificación debe dividir el total de puntos del modelo en clases separables por los valores de la *signatura geométrica*.



**Esquema de un modelo digital multivariable, similar conceptualmente a una imagen multiespectral.**

Los métodos de clasificación han sido extensivamente estudiados y las publicaciones al respecto son numerosas. Dada la extensa bibliografía y que se trata de métodos sólidamente establecidos, su base teórica no se tratará en el presente trabajo. En Mike (1985) pueden encontrarse las bases generales y una buena descripción de los métodos más usuales.

La clasificación puede dividirse en dos grupos diferentes: supervisada y no supervisada. La clasificación supervisada supone un conocimiento previo de las clases por parte del operador, que debe delimitar grupos de píxeles representativos para cada una de ellas, a partir de los cuales se determinan los valores que definen la *signatura*. La clasificación no supervisada — *clustering*— no requiere intervención del operador ya que divide los píxeles en "grupos naturales", segmentando el espacio  $k$ -dimensional —donde cada eje de coordenadas representa una variable— con criterios estadísticos.

La clasificación no supervisada presenta la ventaja, por tanto, de que no requiere un previo conocimiento de las clases existentes en la zona; obliga, en contra, a realizar una interpretación

de los resultados, reflejo de combinaciones de variables inicialmente desconocidas. La comprobación de qué formas del relieve pueden diferenciarse mediante procesos de clasificación puede llevarse a cabo adecuadamente mediante métodos de este tipo, que no introducen hipótesis previas y están libres de sesgos por parte del operador.

Uno de los métodos más habituales en la clasificación no supervisada es el algoritmo denominado habitualmente *isodata* propuesto por Duda y Hart (1973). Este algoritmo realiza un proceso iterativo para dividir el espacio  $k$ -dimensional en un número predefinido de clases,  $n$ . En un primer paso, los  $n$  vectores de medias de las clases se rellenan con valores arbitrarios y los píxeles se clasifican en función de su vector de valores, asignándolos a la clase de signatura más próxima. Posteriormente, los vectores de medias de las clases son recalculados a partir de los nuevos grupos y los píxeles son reclasificados. El proceso se repite hasta que no se detecta un cambio significativo en las asignación de píxeles entre un paso y el anterior.

No han sido localizados trabajos prácticos en la bibliografía que apliquen métodos de clasificación exclusivamente a los MDM aunque sí existen propuestas al respecto. Weibel y DeLotto (1988) realizan una revisión general de los pasos a realizar en el proceso: especificación de variables, extracción de la signatura geométrica y clasificación, indicando algunos problemas generales. Franklin y LeDrew (1983) plantean los primeros pasos en una clasificación mixta mediante datos procedentes de teledetección y MDT pero sin ofrecer resultados prácticos. En un trabajo posterior, Franklin (1987b) consigue mejores resultados en la identificación de la cubierta vegetal incorporando modelos digitales del terreno como bandas auxiliares. Guindon *et al.* (1982:14) también mencionan los beneficios potenciales de usar ambos tipos de datos en una clasificación pero no llegan a presentar experiencias concretas.

En Felicísimo (1994) se muestra una aplicación de clasificación no supervisada a un MDM compuesto por los modelos de pendiente, curvatura general y rugosidad de una zona montañosa de Asturias.

Un primer análisis de las relaciones entre variables se muestra en la tabla siguiente, donde se presentan los valores de los coeficientes de correlación — $r$  de Pearson— entre las variables mencionadas más la altitud,  $h$ .

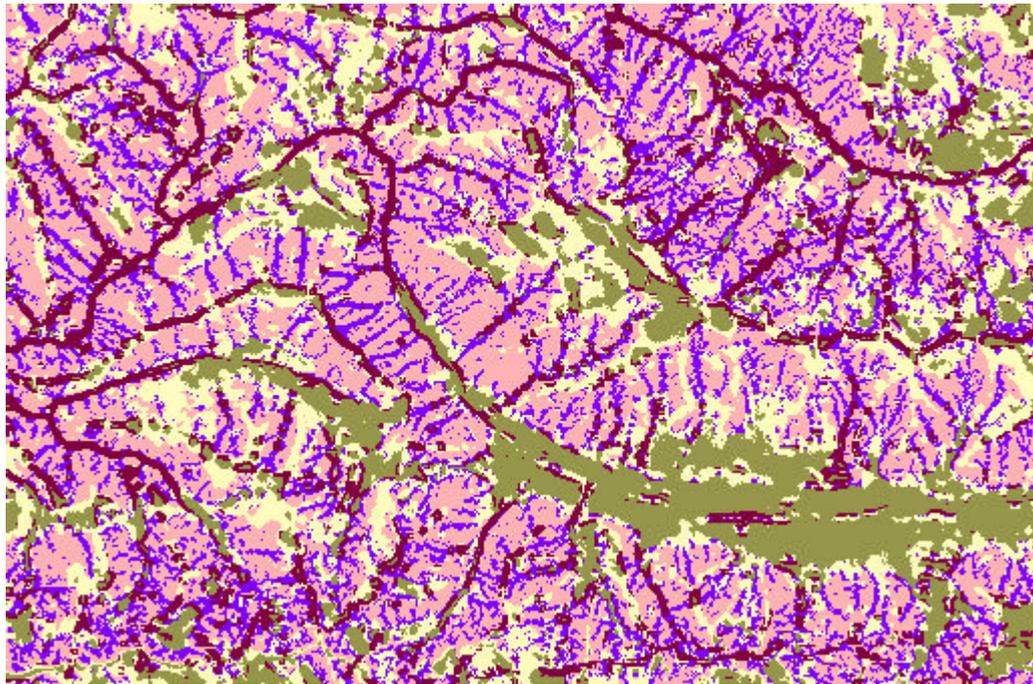
<b>Coefficiente de correlación <math>r</math> de Pearson</b>			
	altitud	pendiente, $\chi$	curvatura, $\gamma$
pendiente, $\chi$	+0.047	+1.000	-0.031
curvatura, $\gamma$	-0.128	-0.031	+1.000
rugosidad, $\vartheta$	-0.082	-0.121	+0.089

donde todos los coeficientes son significativos para  $P < 0,01$

La tabla anterior permite observar algunas características de interés de las relaciones entre variables. Una de las más obvias es la relación inversa entre altitud y concavidad, justificable por la distribución de valles y crestas en las zonas bajas y altas respectivamente. La relación directa entre altitud y pendiente nos refleja la tendencia hacia perfiles cóncavos, con pendientes más fuertes en las zonas altas y más suaves en altitudes menores. Otra relación menos evidentes es el aumento de rugosidad en las zonas bajas, que debe ser interpretado desde un punto de vista

dinámico: en las zonas altas, de mayor pendiente, los fenómenos erosivos y de reptación — *creep*— generan superficies más uniformes. En las zonas bajas, la acumulación de derrubios y la acción menos intensa de los agentes erosivos permiten un diseño topográfico más heterogéneo a escalas de decenas de metros —la ventana de cálculo es de 3x3 y la luz de malla de 25 m—.

En el proceso de clasificación no supervisada se introdujo, como único parámetro, el número de clases a separar: 5. Los resultados de la clasificación se presentan, de forma gráfica, en la figura siguiente.



**Resultado de una clasificación no supervisada a partir de los modelos digitales de pendientes, curvatura y rugosidad.**

Clase 1 (verde): valores bajos de pendiente, medios de rugosidad y formas ligeramente cóncavas, agrupa zonas de vega, fondos de valles abiertos y las zonas más bajas de las laderas, cubiertas frecuentemente por formaciones clásticas relativamente estables, procedentes de zonas superiores.

Clase 2 (amarillo): zonas con pendientes medias, formas ligeramente convexas y baja rugosidad. Se distribuye preferentemente en los márgenes de la clase 1, ocupando las zonas inmediatamente superiores a la línea de ruptura de pendientes. Se observa una cierta correspondencia con zonas cubiertas por formaciones clásticas sin matriz, afectadas por procesos más activos que las de la clase anterior.

Clase 3 (rosa): fuerte pendiente, formas ligeramente convexas y baja rugosidad. Representa las laderas con superficie relativamente uniforme.

Clase 4 (azul): fuerte pendiente, formas cóncavas y rugosidad media. Se distribuyen separando las zonas de ladera pertenecientes a la clase 3 y representan los cauces de arroyada y torrenteras que surcan las laderas, de poca longitud pero alto potencial erosivo debido a la elevada pendiente.

Clase 5 (granate): pendiente media y rugosidad muy alta: representa dos clases

diferentes de elementos: los fondos de valle muy angostos, con un marcado perfil en V y las crestas muy escarpadas, con perfil en  $\Lambda$ . La agrupación de ambas formas en la misma clase es lo que condiciona los valores de curvatura medios, estadístico ambiguo resultante de utilizar la curvatura general como medida.

## La descripción estadística

Tanto el MDE como los modelos derivados pueden ser tratados estadísticamente para concretar sus distribuciones y parámetros específicos. Como a partir del MDE es posible crear variables de distribución lineal como la propia altitud o la pendiente, circular como la orientación, o esférica como los vectores normales a la superficie, los parámetros que describen cada caso son diferentes.

### Descriptores básicos para variables lineales

En el caso de las variables lineales, una descripción estadística básica debe incluir, al menos, los siguientes parámetros: valores mínimo y máximo, rango, media aritmética, varianza, desviación estándar, mediana y distribución de frecuencias.

Denominando  $z$  a la variable analizada, la formulación de la media aritmética ( $\bar{z}$ ) y de la varianza ( $s_z^2$ ) es la siguiente:

$$\bar{z} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n z_i$$

$$s_z^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2$$

donde  $n$  es el número de datos del modelo. La desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza y el rango se deriva directamente de los valores mínimo y máximo. Aunque se ha utilizado la notación correspondiente a estadísticos muestrales, cabe recordar que el modelo puede ser considerado como la propia población. En este sentido, la operación realizada es un censo y, por tanto, los estadísticos obtenidos son los poblacionales o parámetros, que no se estiman mediante una operación de muestreo sino que se evalúan directamente. Sólo podría hablarse de un muestreo en el caso de realizar una selección dentro del modelo para calcular los estadísticos.

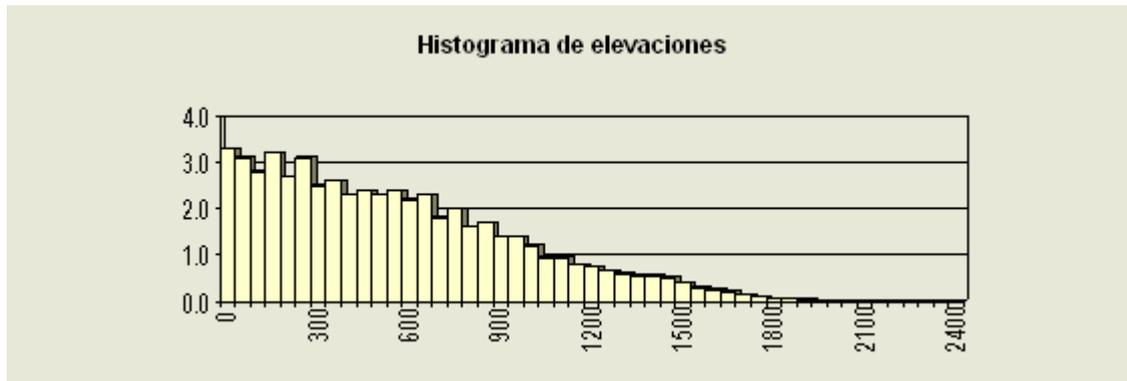
El cálculo de la mediana plantea un problema especial derivado del número de datos: si no se realiza una agrupación en clases, es necesario efectuar una ordenación general de los datos para localizar el valor que divide la distribución de frecuencias en dos partes iguales. Los algoritmos para ordenación son muy eficaces pero, a pesar de todo, la operación puede ser prácticamente imposible en el caso de modelos de grandes dimensiones. En estos casos es conveniente realizar una agrupación de los datos, a partir de la cual el cálculo de la mediana es mucho más sencillo.

La agrupación de los datos de un MDT no plantea problemas ya que sólo es necesario definir los límites de las clases para, posteriormente, asignar cada dato a la que le corresponde. Las clases pueden definirse a partir del rango de valores y de un número de clases prefijado o bien pueden estar predefinidas para facilitar la comparaciones entre modelos diferentes —por ejemplo, con intervalos de 50 ó 100 metros en los MDE—.

A partir de una distribución de frecuencias es posible recalcular con facilidad los estadísticos

básicos con una pérdida de precisión inapreciable debido al elevado número de datos que suelen formar un MDT. En el caso concreto de la mediana, el método de cálculo a partir de la distribución de frecuencias se basa en el cálculo de las frecuencias acumuladas "directas" e inversas para cada clase, sin necesidad de efectuar una ordenación caso a caso (Sokal y Rohlf, 1979:58).

La distribución de frecuencias o histograma es una herramienta útil para descubrir incoherencias internas en el MDT. En el caso del MDE, por ejemplo, la presencia de "dientes de sierra" en el histograma es indicador de una interpolación deficiente. Estos dientes aparecen como múltiplos o submúltiplos del intervalo entre curvas de nivel.



donde  $\bar{z} = 625\text{m}$ ;  $s_z = 436\text{m}$ ;  $z_{MAX} = 2581\text{m}$ ; mediana = 550m

#### Histograma de altitudes de Asturias (modelo MDE200 del IGN) con clases de 50 m

En la figura superior se muestra el efecto mencionado en un histograma de altitud de Asturias construido a partir del MDE200 del I.G.N.; el ancho de clase es de 50 m y el MDE se construyó a partir de mapas de isohipsas con intervalos de 100 m.

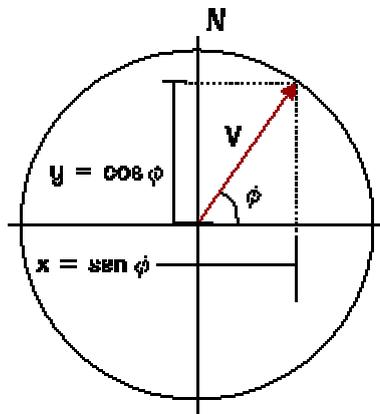
### Descriptores básicos para variables circulares

Algunos modelos digitales del terreno incluyen variables con una escala por intervalos que sigue una distribución circular y cuyo origen o punto cero está fijado arbitrariamente. El caso más evidente en los MDT es la orientación del terreno, donde no puede decirse, por ejemplo, que un punto orientado al Este (90°) tenga un valor de orientación "superior" a otro orientado al Nordeste (45°). Asimismo, definir el Norte como origen de una escala creciente en el sentido de giro de las agujas del reloj es puramente convencional —en matemática el origen de las escalas angulares se fija en la posición Este y el sentido de giro es inverso—. La aplicación de métodos estadísticos inapropiados puede conducir a errores y resultados paradójicos como, por ejemplo, que la media de 1° y 359° —dos orientaciones al Norte—, sea 180°.

Las variables circulares necesitan, por tanto, unos métodos estadísticos específicos que, en sus aspectos básicos, no son más dificultosos que los métodos clásicos. Estos métodos tratan las variables circulares como magnitudes vectoriales, es decir, cuando decimos que un punto está orientado al Nordeste, estamos asignando a dicho punto un vector unidad orientado hacia los 45°. La estadística circular realiza la mayor parte de sus tratamientos usando las coordenadas rectangulares de estos datos vectoriales. Estas coordenadas se determinan directamente mediante operaciones trigonométricas elementales. Para un punto  $i$ , con orientación  $\phi_i$ :

$$x_i = \text{sen } \phi_i; \quad y_i = \text{cos } \phi_i$$

donde el eje  $X$  se hace coincidir con la dirección Este-Oeste y el  $Y$  con la Norte-Sur y el origen se fija en el Norte —esta notación, como cualquier otra alternativa, es esencialmente arbitraria, por lo que las expresiones pueden variar entre diferentes autores—.



Transformación de las coordenadas circulares a rectangulares en el caso de dos dimensiones. El módulo  $R$  del vector

$V$  es:

$$R = \sqrt{\cos^2 \phi + \text{sen}^2 \phi}$$

En las variables circulares es sencillo el cálculo de al menos tres estadísticos básicos: la dirección media, el rango de variación y la varianza circular, indicadora de la dispersión de los datos. La dirección media de un conjunto de  $n$  datos,  $\bar{\phi}$ , coincide con la dirección del vector resultante de la suma vectorial de los datos. Éste queda definido por las coordenadas rectangulares  $X$  e  $Y$ , suma de los  $n$  datos:

$$X = \sum_i \text{sen } \phi_i; Y = \sum_i \cos \phi_i$$

A partir de estos componentes, es posible calcular directamente la orientación del vector suma mediante la función arco tangente:

$$\bar{\phi} = \text{tg}^{-1} \frac{X}{Y}$$

En cuanto a los estadísticos de dispersión, y de forma similar a las variables lineales, es posible definir un rango de variación para los datos angulares. El rango, dado en unidades angulares, coincide con el arco de menor magnitud que engloba la totalidad de los datos. De esta forma, un rango de  $15^\circ$  implica una agrupación mayor que uno de  $45^\circ$ . Otra alternativa complementaria es utilizar el módulo del vector suma,  $R$ , como una medida de la dispersión de los datos angulares:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

En efecto,  $R$  puede variar entre 0 para una dispersión total donde los vectores se anulan entre sí, hasta  $n$  cuando todos los datos tienen la misma orientación y la dispersión es nula —con un rango de variación de  $0^\circ$ —. Cuando  $R$  tiene un valor nulo la orientación media queda sin definir. Es conveniente normalizar el valor de  $R$  dividiéndolo por el tamaño muestral con el fin de hacerlo independiente del número de datos:  $\bar{R} = R/n$ . El nuevo estadístico se distribuye consecuentemente entre un valor mínimo de 0 y un máximo de 1.

Han sido propuestas varias medidas de dispersión basándose en el valor normalizado  $\bar{R}$ , como la desviación angular,  $s_d$  (Zar, 1984:431) y la desviación circular estándar,  $s_c$  (Mardia, 1972:24), cuyas expresiones son las siguientes:

$$s_d = \sqrt{2 \cdot (1 - \bar{R})}; s_e = \sqrt{-2 \cdot \ln \bar{R}}$$

Los resultados de ambas expresiones deben interpretarse en radianes. Al variar el valor de  $\bar{R}$  en el rango 0-1, las expresiones anteriores tienen valores limitados entre un mínimo de 0 para ambas —dispersión nula— y máximos de infinito para  $s_d$  y de  $\sqrt{2}$  para  $s_e$  —equivalente a unos 81 &delta;εγ;—.

Cabe indicar, para finalizar este apartado, que las variables circulares tienen distribuciones estadísticas propias, sólo ocasionalmente relacionadas con las características de las variables lineales. Entre ellas pueden destacarse la distribución circular uniforme y la distribución de von Mises. La primera representa una situación en la que los datos se distribuyen sin una orientación preferente y donde la probabilidad de que un dato se encuentre en un rango determinado depende exclusivamente de la amplitud angular de éste. Puede esperarse que el valor del estadístico  $\bar{R}$  sea muy bajo, aunque no necesariamente nulo.

La distribución de von Mises es, en cierta forma, la equivalente a la de Gauss en estadística lineal ya que representa una situación donde existe una orientación preferente y presenta características estrechamente ligadas a la anterior, por lo que también suele denominarse "distribución circular normal". La distribución es simétrica, unimodal y está descrita por dos únicos parámetros: la orientación media y un parámetro de dispersión,  $\kappa$ . Como sería esperable, la mínima probabilidad de la distribución se presenta para la orientación opuesta a la media, es decir, existe una "antimoda" con un valor de  $\bar{\phi} \pm \pi$  radianes. También es posible la adaptación de esta distribución a aquellas situaciones en las que existe una dirección axial preferente y la distribución resultante es bimodal con valores opuestos (Upton y Fingleton, 1989:231).

## Otros descriptores

Independientemente de los estadísticos convencionales, se ha desarrollado progresivamente un conjunto de medidas heterogéneas, cada una de las cuales puede usarse como indicador de diversas características de los MDT.

### La entropía como medida de diversidad

Frecuentemente, los operadores usados en proceso de imágenes digitales han sido adaptados al tratamiento de los MDT. Generalmente son indicadores de la heterogeneidad de valores, por lo que aplicadas al MDE o MDP indican rugosidad.

Un ejemplo de este tipo de medidas es la entropía o medida de la diversidad, originada en teoría de la información y propuesta ya hace algunos años como indicador de información aplicado a la geomorfología (Connelly, 1972:99). La expresión más conocida es la denominada de Shannon-Weaver:

$$H = -\sum_i p_i \cdot \ln p_i$$

donde  $p_i$  es la probabilidad del valor  $i$  en la población:  $p_i = n_i / N$ , donde  $N$  es el número de total de puntos del MDT y  $n_i$  el número de ellos que pertenece al valor o clase  $i$ . El mínimo valor de  $H$  aparece cuando todos los elementos tienen el mismo valor, en cuyo caso  $H=0$ .

La entropía fue ya propuesta como indicador de información en geomorfología por Connelly (1972); Franklin y Peddle (1987) la incluyen como medida de textura del relieve señalando que, como la distribución de la altitud es esencialmente no aleatoria, los valores medidos de entropía

sobre los MDE son generalmente bajos.

### La medida de la autocorrelación

Los índices más habituales para analizar la existencia de autocorrelación en los MDT son los denominados de Geary y de Moran. Ambos analizan las frecuencias de adyacencia o vecindad, El índice de Geary responde a la expresión siguiente:

$$G = \frac{\sum_i \sum_j w_{ij} \cdot (z_i - z_j)^2}{2 \cdot \sum_i \sum_j w_{ij} \cdot \sigma_z}$$

donde  $\sigma_z = \sum_i (z_i - \bar{z})^2 / (N - 1)$

En la expresión anterior,  $w_{ij}$  toma el valor 1 si las celdas  $i$  y  $j$  son vecinas y 0 en caso contrario. Los índices  $i$  y  $j$  toman los valores  $1 \dots N$ , donde  $N$  es el número total del celdas del modelo.

El valor esperado de  $G$  para ausencia de autocorrelación es 1; si ésta existe y es positiva,  $0 < G < 1$ , y si es negativa,  $G > 1$ .

El índice de Moran,  $I$ , aumenta con la correlación y obedece a la expresión:

$$I = \frac{\sum_i \sum_j w_{ij} \cdot (z_i - \bar{z}) \cdot (z_j - \bar{z})}{\sum_i \sum_j w_{ij} \cdot s_z^2}$$

donde  $s_z^2 = \sum_i (z_i - \bar{z})^2 / n$

La diferencia principal entre ambos índices es la referencia al valor medio de la variable en el caso de  $I$ . La interpretación y valores esperados para ambos índices se resume en la tabla siguiente:

<b>Rangos de valores de los índices de Geary y Moran</b>		
<b>Valores</b>	<b>Geary, <math>G</math></b>	<b>Moran, <math>I</math></b>
similares, variable regionalizada, agrupamiento	$0 < G < 1$	$I < k$
aleatorio, no correlacionados	$G=1$	$I=k$
diferentes, contrastados	$G > 1$	$I > k$
donde $k=-1/(N-1)$ , siendo $N$ el número de celdas		

Los índices de Moran y Geary han sido utilizados por Lee y Marion (1994) para analizar la autocorrelación de un total de 920 MDE del US Geological Survey a una escala nominal 1:250.000. Los resultados muestran valores de autocorrelación positiva muy significativos. Las

distribuciones de los índices  $G$  e  $I$  están muy concentradas y son fuertemente asimétricas. Tras analizar los cambios provocados por la manipulación de los MDE, concluyen que existe una relación inversa entre la autocorrelación y la pérdida de información en las conversiones entre MDE matriciales y TIN.

### **La dimensión fractal**

La dimensión fractal, definida por Mandelbrot (1967) es un parámetro que progresivamente ha ido haciéndose un lugar en la modelización de la topografía, especialmente en lo que se refiere a la visualización realista del relieve (Jeffery, 1987).

La mayoría de los objetos geométricos pueden ser descritos de forma completa mediante pocos parámetros. La consecuencia más interesante para nosotros es que su representación mediante modelos puede realizarse sin pérdida de información mediante un número limitado de datos, es decir, son replicables.

En cambio, muchos objetos reales, entre los cuales se cuentan las superficies topográficas, sólo pueden representarse mediante modelos con una pérdida obligatoria de información, más o menos importante en función de la generalización del modelo. Una buena parte de la investigación sobre las alternativas estructurales de los MDT, presentadas en los apartados anteriores, se debe al intento de hacer mínima la pérdida de información manteniendo el conjunto de datos necesario para ello dentro de tamaños razonables.

Esta circunstancia se debe a la imposibilidad de descomponer estos objetos en formas geométricas simples que los representen con absoluta fidelidad. Estos objetos tienen algunas propiedades en común, entre las cuales está la ser autosimilares, es decir, que su apariencia y propiedades estadísticas y topológicas permanecen constantes, independientemente de la escala del análisis —o, al menos, dentro de un rango amplio de escalas—.

Una línea de costa es un objeto con esas características. Supuesto un mapa que representa una línea de costa elegida al azar, es difícil deducir sólo de su apariencia la escala del mismo. Esta circunstancia ilustra el concepto de autosimilaridad mencionado anteriormente y los objetos que la poseen han sido denominados "escalantes" (Mandelbrot, 1984).

La segunda propiedad de los objetos mencionados aparece cuando se intentan medir, determinando, por ejemplo, la longitud o la superficie de un elemento topográfico.

La longitud de una línea de costa puede ser medida sumando la de un conjunto de segmentos-unidad, rectilíneos, adyacentes, iguales y superpuestos a la misma —es decir, teselándola con pequeños segmentos—. La longitud estimada es igual a la longitud de un segmento multiplicada por el número de ellos necesario para cubrir toda la costa, desde un punto origen a un punto final. Steinhaus (1954:8) fue el primero que mostró que el resultado del proceso es dependiente de la longitud de los segmentos-unidad, de forma que la longitud de la costa crece cuando la medida se realiza con unidades menores.

La importancia de la "paradoja de Steinhaus" en el campo de los MDT es obvia, ya que una línea de costa no es conceptualmente diferente a una curva de nivel o a un perfil topográfico. La influencia de la escala de medida en la longitud de las líneas es generalizable en el sentido de que también las áreas son afectadas por el mismo fenómeno. Debido a ello, puede afirmarse que cualquier modelo, digital o analógico, ofrecerá resultados dependientes de la escala de medida utilizada y del grado de generalización (Maling, 1968:155). En este mismo sentido, las medidas realizadas sobre un modelo serán tanto más reales como menor pérdida de información haya implicado el proceso de generalización realizado para construirlo.

La dependencia entre los resultados y la escala de medida puede establecerse mediante un parámetro denominado dimensión de Hausdorff-Besicovich,  $D$ , que puede definirse de la forma siguiente:

$$L_g = k \cdot g^D$$

donde  $k$  es una constante de proporcionalidad,  $g$  es la unidad de medida —por ejemplo, longitud de los segmentos-unidad usados para medir la costa— y  $Lg$  el resultado de la medición.

El término dimensión fractal se aplica a cualquier función para la cual la dimensión  $D$  excede la dimensión topológica —0 para los puntos, 1 para las líneas, 2 para superficies, etc.— y suele representarse también mediante  $D$ . El interés de la aplicación de la dimensión fractal a los MDE reside en que es un índice de la intensidad del relieve; así, en el caso de una superficie, la rugosidad es muy baja cuando  $D$  está próximo a 2, aumentando progresivamente hasta el valor de 3 en el caso de una superficie teórica infinitamente irregular (Clarke, 1988:176).

El cálculo de la dimensión fractal de un objeto puede realizarse de varias formas. La más sencilla es realizar dos medidas con unidades de diferente tamaño,  $g_1$  y  $g_2$ , con lo cual se obtendrán dos resultados,  $L_1$  y  $L_2$ . La dimensión fractal,  $D$ , en el caso de una línea, puede estimarse mediante la expresión siguiente (Goodchild y Mark, 1987:266):

$$D = \frac{\log(N_2/N_1)}{\log(g_1/g_2)}$$

donde  $N_i$  es el número de pasos de longitud  $g_i$  necesarios para teselar la línea ( $N_i = L_i/g_i$ ).

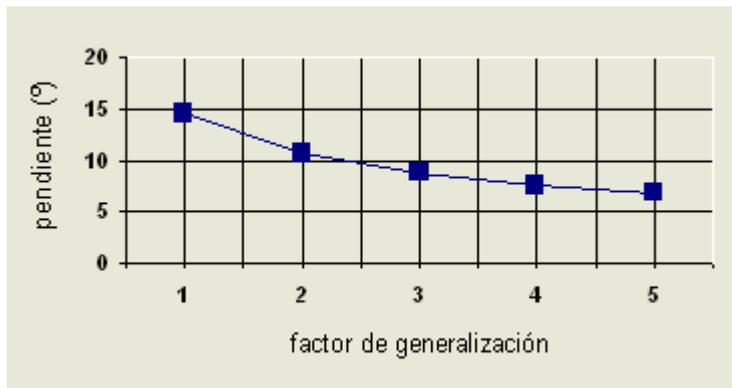
Es decir,  $D$  es la pendiente de la recta de regresión entre los logaritmos de ambas variables. En el caso de un MDE puede utilizarse un método equivalente, midiendo el área resultante con diferentes intervalos entre los datos. Los valores para superficies reales se encuentran aproximadamente en el rango de 2.1 a 2.4 (Goodchild y Mark, 1987:270).

Otro método de estimación de  $D$ , equivalente al anterior pero que aporta más información sobre el análisis, es el cálculo del coeficiente de regresión usando más de dos pares de valores unidad-longitud o unidad-superficie. El ajuste de los pares de valores a la recta permite conocer el grado de autosimilaridad del elemento a diferentes escalas.

Una consecuencia de interés aplicable a los modelos digitales del terreno es que la magnitud de las medidas crecerá proporcionalmente a la resolución del modelo. Por ejemplo, la pendiente media de un MDP con 25 m de luz será significativamente superior a la de un MDP de la misma zona con 100 m de tamaño de malla.

En Felicísimo (1994:73) se da un dato significativo sobre este problema: a partir de dos MDE de la misma zona pero de diferente origen se calcula la pendiente media. En el primer caso, con una luz de malla de 200 m, la pendiente media es de 19°; en el segundo, con 25 m de resolución, el resultado es de 27°. La diferencia observada es, por tanto, de 8°.

La figura inferior muestra las medidas efectuadas sobre varios modelos digitales de pendientes procedentes de MDE con diferentes niveles de generalización. Puede observarse la disminución de la pendiente media, en ordenadas, con la reducción de resolución del MDE —factor de generalización en abscisas—.



**Relación entre la pendiente media de una zona y el grado de generalización del modelo digital de elevaciones usado para generar el MDP**

**FIN DEL CAPÍTULO**