

# Medida, control y propagación del error

por [Angel Manuel Felicísimo](http://www.etsimo.uniovi.es/~feli/), biólogo  
<http://www.etsimo.uniovi.es/~feli/>

## Introducción

Los ordenadores y programas utilizados para el manejo de la información cartográfica permiten definir localizaciones con una precisión casi arbitraria. Los dígitos significativos que muchos SIG pueden manejar permiten representar una coordenada UTM especificando sin problemas las milésimas de milímetro. Esta precisión se transmite aparentemente al resto de las operaciones que realizan los SIG. Unos buenos gráficos, una leyenda fácilmente legible, unos colores correctamente elegidos y otros aspectos formales de la presentación, tienen como resultado una sobrevaloración de la calidad de la información presentada.

Dadas estas circunstancias y otras similares, no es extraño observar la ausencia de cualquier mención a la exactitud en las bases cartográficas digitales. Tampoco es frecuente cuestionar los resultados de un análisis, ni fácil comprobar la bondad de unos resultados cuando no se presentan estadísticos relativos al error de los datos y operaciones.

Sin embargo, la realidad muestra de forma cada vez más patente que los problemas inherentes al manejo de las bases de datos cartográficas se deben, en una buena parte, a su mala calidad. Es conveniente tener en cuenta que muchos documentos digitales han sido "capturados" de mapas impresos de naturaleza muy heterogénea. Estos mapas fueron generados con unos objetivos y expectativas que no tienen por qué coincidir con los actuales. La potente maquinaria actual y los sofisticados programas informáticos permiten obtener un resultado que replica fielmente todos los defectos del original y añade algunos nuevos. Sin embargo, su naturaleza digital induce a creer frecuentemente que el contenido de la base de datos es mejor que el original analógico.

El problema se incrementa con el tiempo, cuando unos datos originales han sido usados para diferentes modelizaciones, cuyos resultados son, asimismo, tomados como ciertos y reutilizados en otros procesos. El proceso sigue hasta el punto de olvidar el origen de la cadena y perdiendo, por tanto, toda referencia con la realidad.

Por estos motivos es cada vez más necesario incorporar lo que se ha llamado meta-información o **metadatos** en los productos SIG: **información sobre la información**, de la cual la referente al error es uno de los elementos de mayor importancia (Geertman y Ruddyjs, 1994:152).

## Las fuentes del error

El modelo digital de elevaciones es el origen de todas las modelizaciones total o parcialmente dependientes de la topografía. Por este motivo, la utilidad y validez de los resultados derivados están estrechamente relacionadas con la calidad del modelo original. Es muy frecuente en la bibliografía la ausencia de información sobre las características de los MDE utilizados en las aplicaciones, especialmente cuando éstos han sido construidos por los propios investigadores y no provienen de fuentes oficiales o de organismos cualificados.

La calidad de un MDE depende del tipo y magnitud de los errores implicados. Conviene recordar, sin embargo, que la existencia de error es una circunstancia asumida en el proceso de modelización, que siempre implica una simplificación de la realidad. La información es, por

tanto, inherentemente imprecisa. El problema básico consiste en conocer y controlar esta imprecisión, de forma que sea posible saber la fiabilidad de los resultados.

Los errores en los MDE pueden ser separados en dos categorías:

- los **errores posicionales** implican una deficiente localización geográfica de la cota o de la trayectoria de la curva de nivel y afectan, por tanto, a la situación en el plano  $XY$
- los **errores atributivos** suponen una asignación imprecisa de la altitud asociada a la cota o a la curva e implican a las coordenadas en el eje  $Z$

Estos dos tipos de errores han sido denominados también, de forma más genérica, **cartográficos** —error en la localización de elementos—, y **temáticos** —error en el atributo cartografiado— (Veregin, 1989b:12).

Los errores posicionales afectan a los modelos vectoriales, como los basados en contornos o en las redes de triángulos, que manejan entidades geométricas. Los modelos raster, basados en localizaciones definidas implícitamente no se ven afectados por errores de posición.

Los errores atributivos afectan tanto a modelos vectoriales como raster. En el primer caso suele tratarse de errores en el sentido más básico de la palabra —*blunders*—, es decir, fallos groseros y locales en la asignación de la altitud. En el caso de las matrices regulares, el origen del error suele estar en las múltiples operaciones geométricas implicadas en la construcción del MDE. En este caso, el error es de naturaleza estadística y global, pudiendo considerarse un atributo que define y caracteriza el MDE.

## El error de las fuentes primarias

Como ya se ha indicado, los MDE pueden ser construidos a partir de orígenes diversos. Los más habituales son la digitalización de mapas preexistentes y la restitución fotogramétrica con salida digital cuya versión más reciente usa pares estereoscópicos tomados por satélites.

### La construcción del MDE mediante pares estereoscópicos con imágenes de satélite

Como ya se ha indicado anteriormente, las imágenes de algunos sensores transportados por satélite han sido utilizadas para generar modelos digitales de elevaciones usándolas como pares estereoscópicos.

En un primer ensayo, Mukai *et al.* (1989) han utilizado pares de imágenes **Landsat-TM** para calcular altitudes en la zona de solapamiento entre dos órbitas. Los resultados que presentan señalan un **error cuadrático medio**, ECM, de 92 m, lo que supone 3 veces el tamaño del pixel de la imagen original —30 m—. La zona, de 40x45 km y situada en los Alpes centrales de Japón, posee un desnivel máximo de 2200 m. Para el cálculo del ECM se utilizó un total de 60 puntos de control. Las imágenes Landsat no son adecuadas para este trabajo debido a su reducido solapamiento, de apenas un 5%.

El **satélite SPOT** es claramente más adecuado para el cálculo de altitudes debido a dos circunstancias. La primera, que el tamaño de pixel de las imágenes es de 10 m en modo pancromático, lo que supone un incremento muy significativo de la resolución. La segunda es que el SPOT puede tomar pares de imágenes estereoscópicas de la zona que se desee girando las cámaras, lo que permite cubrir cualquier zona de la superficie terrestre; en esta caso el solapamiento entre imágenes puede ser del 66%.

Mukai *et al.* (1990), usando técnicas similares a las de su anterior trabajo con Landsat-TM, consiguen en este caso valores del ECM de 26 m partiendo de las imágenes SPOT pancromáticas. Sasowsky *et al.* (1992) realizan pruebas similares en un área de 25 km<sup>2</sup> de Alaska y proponen una magnitud del ECM de 19 m, con errores entre -13 y +48 m. En este caso, los errores no tienen media nula, lo que significa que el MDE derivado de las imágenes SPOT tiene una tendencia significativa a proponer altitudes más elevadas que el mapa de referencia —escala 1:6.000—.

Priebbenow (1988) presenta resultados de una experiencia realizada en Australia con valores del ECM de 5,4 m. Su conclusión es que las imágenes SPOT pancromáticas permiten generar cartografía con una precisión geométrica elevada y compatible con los estándares de la escala 1:50.000.

Finalmente, Kubik y Wu (1995) presentan los resultados del tratamiento de imágenes SPOT mediante estaciones de trabajo fotogramétricas con un ECM de 6 m en altitud.

La conclusión general es que las imágenes SPOT permiten construir modelos con valores del ECM variables en función del relieve y de los métodos utilizados. La magnitud del error limita sus aplicaciones en grandes escalas pero, como veremos posteriormente, puede ser razonable si se generan modelos matriciales donde el ECM sea aproximadamente un 10% del tamaño de la malla —distancia entre filas y columnas—.

## **La construcción del MDE mediante interferometría radar**

La **interferometría radar** es una técnica que usa las diferencias de fase entre dos imágenes para estimar la distancia entre la superficie y el satélite o avión. La fase de un pixel es la suma de dos componentes: la fase específica —relacionada con la naturaleza del terreno— y un desfase que depende de la distancia entre el terreno y el radar. Superponiendo y hallando la diferencia entre dos imágenes diferentes la fase específica puede eliminarse. La resultante es el componente debido a la diferencia de distancia entre los dos pasos del satélite. A partir de esta imagen de interferencia es posible estimar la altitud absoluta con precisión variable en función de diferentes parámetros.

La construcción de MDE mediante radar tiene se más reciente muestra en el **TOPSAR** —*topographic synthetic aperture radar*—, desarrollado por el *Jet Propulsion Laboratory* de California. El TOPSAR, en funcionamiento conjunto con el *JPL Aircraft SAR*, adquiere imágenes cenitales de la superficie terrestre con una resolución horizontal de 5 m y un error en la determinación de la altitud de 1 a 3 m, en función del tipo de relieve. El TOPSAR/AIRSAR es transportado por un DC-8 a una altitud típica de 9 km. El sistema está dotado de un sistema GPS para la localización, lo que permite una referenciación geográfica precisa de la trayectoria del vuelo y, por tanto, del conjunto de los datos medidos.

Thompson *et al.* (1995:99) indican que la satisfactoria experiencia del TOPSAR anuncia un posible satélite topográfico que podría tener un error altitudinal de unos 2 m con una resolución horizontal de 30 m. Sin embargo, en Evans (1995) se indica que los radares actuales transportados por satélites no pueden ser utilizados de forma rutinaria para determinar la superficie topográfica. La razón principal reside en la desconocida influencia de la ionosfera en el retraso de la señal; este problema puede ser resuelto mediante radares de doble frecuencia, o reducido tomando los datos durante la noche —lo que limita la cobertura y periodo de las tomas—.

Small y Nüesch (1996) analizaron la calidad de los datos ERS interferométricos comparándolos con "modelos de referencia de alta calidad". El mejor resultado obtenido fue un ECM de 2.7 m.

En otro ensayo, el ECM creció hasta los 12 m a causa del mayor intervalo temporal entre las tomas (3 días en el primer caso y 15 días en el segundo).

## El error de las fuentes secundarias

El **error posicional**, que afecta a las estructuras vectoriales, puede tener varios orígenes. El más frecuente es el derivado de la digitalización de mapas, tanto más debido a la tendencia a infravalorarlo, probablemente por la dificultad de su corrección. Cabe destacar que una magnitud elevada del error posicional puede obligar a un uso de los mapas exclusivamente cualitativo, limitando severamente la utilidad de la información.

La **digitalización manual de mapas** sigue siendo el método más usual de incorporar información topográfica. La razón probablemente estriba en que la digitalización automática es dificultosa a partir de los complejos mapas editados, que son los más fácilmente disponibles.

La digitalización manual ha sido reconocida como una importante fuente de error cartográfico cuyas causas pueden dividirse en dos categorías, en función de su origen:

- las **causas externas** están relacionadas generalmente con la deformación de los documentos —mapas antiguos, en mal estado de conservación, referenciación geográfica deficiente o, simplemente, de mala calidad—.
- las **causas operacionales** hacen referencia a los procesos de digitalización y manipulación posterior de los datos: por ejemplo, el error introducido en el proceso de digitalización se debe básicamente a la inexacta colocación del cursor sobre la curva de nivel.

Los errores debidos a deformaciones del documento digitalizado pueden rectificarse, al menos parcialmente, mediante un proceso global de corrección geométrica. Este proceso está integrado habitualmente en los propios programas de digitalización y son capaces de modificar coherentemente la localización de las entidades cartografiadas en función de un conjunto de puntos de referencia —ver apartado siguiente—.

## El error de la digitalización

En el caso de los errores derivados de la digitalización manual, cabe distinguir tres casos diferentes:

- el **error topológico**, provocado por que el operador sigue una línea equivocada debido a una mala interpretación del mapa
- el **error estocástico**, generado por la imprecisión en el seguimiento de las líneas debido a una deficiente colocación del cursor
- el **error de generalización**, debido a la simplificación del trazado de las curvas transformadas a polilíneas de tramos rectos

Los **errores topológicos** son simples de detectar y corregir mediante un simple análisis visual debido a los rígidos patrones de distribución de las curvas de nivel —"paralelismo", coherencia topológica—. Por este motivo, este tipo de errores se elimina en la primera etapa del control de calidad y no tiene una influencia relevante en la calidad del modelo final. Como ya se ha indicado en el tema anterior, el error topológico es mucho más frecuente en la digitalización automática mediante escáner (Peled y Fradkin, 1994:246), donde la experiencia y capacidad de interpretación del operador no pueden ser aplicadas.

Los **errores estocásticos** de digitalización pueden ser debidos esporádicamente a causas fisiológicas —temblores causados por el cansancio y otros movimientos bruscos—. En este caso, el operador suele detectarlos y corregirlos sobre la marcha.

Quedan, sin embargo, las imprecisiones debidas a la imposibilidad física de replicar exactamente la trayectoria de las curvas de nivel. En este caso se ha propuesto que los errores de colocación están autocorrelacionados y son, al menos parcialmente, procesos no aleatorios dependientes de los puntos previamente introducidos (Keefer, 1988:477). El motivo es que el operador tiende a un trazado inercial de la línea rebajando o excediendo la trayectoria según su morfología.

Esta circunstancia está clara en el caso de la digitalización en modo continuo —*stream mode*—, donde el cursor está en movimiento y las coordenadas se introducen de forma automática cada cierta distancia sin control por el operador. En el caso de la digitalización punto a punto —*point mode*—, se ha propuesto que el error puede ser aleatorio y no autocorrelacionado. El motivo es que existe una pausa entre punto y punto, durante la cual el operador coloca el cursor sobre la línea. Si el tiempo entre puntos sucesivos es suficiente el error en cada punto será independiente de los anteriores. Sin embargo, existe la tendencia a mantener el cursor en continuo movimiento, pulsando de forma secuencial y continua. En este caso, el modo punto a punto se asemeja al modo continuo y el fenómeno de autocorrelación se hace significativo.

La presencia de autocorrelación puede detectarse mediante pruebas de aleatoriedad, donde la variable independiente es el tiempo o, más exactamente, la secuencia ordenada de puntos digitalizados. El análisis es básicamente equivalente a una serie temporal donde se asume que los puntos son digitalizados a intervalos constantes.

Finalmente, el **error de generalización** se produce por la reducción de la línea curva original a otra compuesta por pequeños segmentos rectilíneos entre los puntos digitalizados. Cabe distinguir dos tipos diferentes de generalización:

- la **generalización cartográfica** —*graphic-oriented generalization*— es utilizada para representar gráficamente la información a diferentes escalas. Se trata de un proceso básicamente gráfico donde las líneas son redondeadas, comprimidas, colapsadas o simplificadas *con el objetivo de facilitar su lectura* y no de conservar una extrema fidelidad al original.
- la **generalización para la modelización** —*model-oriented generalization*— tiene como objetivo la simplificación controlada de los datos *para la conservación de propiedades* relevantes del original. El proceso se realiza para utilizar el modelo en simulación y análisis por lo que es importante la valoración y el control de la propagación del error.

El problema de la digitalización es que *se realiza para la modelización pero partiendo de originales sometidos a una generalización cartográfica*. La conclusión es que el error cometido es frecuentemente desconocido y no cuantificable.

En la digitalización, las curvas de nivel originales quedan representadas mediante un conjunto reducido de vértices. El producto final son polilíneas de menor complejidad que las originales. La razón de efectuar la generalización es la reducción del volumen de datos pero a costa de una pérdida de información que supone un incremento del error.

El error de generalización tiende a reducirse cuando el número de puntos aumenta, y se incrementa generalmente con la complejidad de la línea original. La forma de reducir el error manteniendo un volumen de datos moderado es realizar una buena selección de los puntos críticos de la curva. La experiencia del operador es un factor importante en esta selección pero

probablemente es preferible realizar una digitalización densa y aplicar posteriormente algoritmos de generalización automática. Estos algoritmos, en términos generales, conservan la longitud y ángulos satisfactoriamente y, sobre todo, desplazan mucho menos las líneas que la generalización manual, luego causan mucha menos distorsión (João, 1995:188).

### **El análisis del error de digitalización: modelos ARMA**

Como se ha indicado anteriormente, el análisis del error de la digitalización puede ser asimilado al de las **series temporales**. En el caso de existir autocorrelación, el error en un punto  $j$ ,  $e_j$  puede ser representado como una suma ponderada de un número finito  $n$  de errores anteriores más un término aleatorio  $a$  propio de cada punto:

$$e_j = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_{j-i} \cdot e_{j-i} \right) + a_j$$

Además del proceso autorregresivo puro —AR, *autoregression*— es posible la existencia de otros que expliquen la secuencia temporal. Si el operador se da cuenta de la tendencia de sus errores puede introducir sesgos voluntarios para corregirlos. En este caso aparece un proceso de media móvil —MA, *movil average*— donde la suma ponderada de los anteriores términos aleatorios  $a$  explica una parte de la varianza:

$$e_j = \left( \sum_{i=1}^n \beta_{j-i} \cdot a_{j-i} \right) + a_j$$

Se ha planteado la hipótesis de que el error puede explicarse mediante el modelo autorregresivo, el de media móvil o una combinación de ambos —modelo ARMA—(Keefer, 1988:479).

El uso de modelos ARMA puede ser un camino para modificar los ficheros procedentes de la digitalización y reducir el error posicional global. En efecto, si se demuestra que el modelo es coherente y puede explicar una fracción significativa del error, puede ser aplicado a posteriori para realizar una corrección de las coordenadas. Al menos, la parte del error explicada por autocorrelación podría ser reducida para mejorar la calidad del proceso. Sin embargo, esta hipótesis debe ser aún comprobada ya que no se han localizado trabajos en la bibliografía que lo hayan llevado a la práctica.

### **La cuantificación del error posicional: la banda épsilon**

Cuando una curva de nivel se digitaliza y se define por un número de segmentos, la incertidumbre debida al error posicional de los vértices afecta a una banda o pasillo alrededor de la línea.

La banda de probabilidad suele denominarse banda épsilon  $\epsilon$  y representa un entorno de probabilidad de la localización real de la curva de nivel alrededor de la línea digitalizada. Si la banda es simétrica normalmente a la línea, se asume que no existe sesgo en la digitalización, es decir, no ha existido una tendencia significativa a digitalizar a un lado concreto de la línea.

La banda épsilon fue utilizada originalmente por Perkal (1966) como método de generalizar objetivamente una línea. El algoritmo más utilizado en la actualidad para generalizar las líneas (Peucker y Douglas, 1975) es básicamente un procedimiento iterativo que maneja implícitamente el concepto de banda  $\epsilon$  al definir una distancia umbral para la "limpieza" de las líneas —*weed tolerance*—. El valor de  $\epsilon$  puede usarse, sin embargo, como un índice de calidad al valorar el proceso de digitalización.

Interpretada como una banda de probabilidad, la anchura de la banda  $\epsilon$  crecerá en función directa de la magnitud del error en la digitalización. La banda  $\epsilon$  puede representarse, por tanto, codificada en valores de gris de acuerdo con el valor de probabilidad asignado a cada zona alrededor de la línea —ver figura—.



**Representación de la banda  $\epsilon$  como región probabilística. Cuanto más oscura es la zona, mayor probabilidad tiene de contener la línea real. Los vértices digitalizados se muestran como puntos blancos definiendo el pentágono.**

Es posible realizar una estimación de la magnitud de  $\epsilon$  en un mapa cuando se dispone de otro más detallado de la misma zona. Para ello se superponen algunas líneas homólogas y se miden las distancias entre ellas, perpendicularmente a la línea de referencia y a intervalos constantes. Los errores medidos, en ausencia de sesgo, se ajustarán a una distribución normal de media cero y desviación estándar  $s$ . Para un valor  $\epsilon = \pm 1,96 s$ , la banda  $\epsilon$  representa la zona donde, con una probabilidad del 95%, pasa la línea original.

Cabe considerar que el valor de  $\epsilon$  puede no ser constante en todo el mapa. El motivo es que el error de digitalización puede variar en función de la complejidad de las líneas y de su proximidad.

El manejo de la información en función del valor de  $\epsilon$  es un tema aún poco desarrollado. El tema a empezado a preocupar en el contexto de los mapas temáticos vectoriales, donde la imprecisión de las líneas genera problemas en las operaciones de superposición y, en general, en el álgebra de mapas (Lowell, 1995). Sin embargo, en el caso de la generación del MDE a partir de líneas con error conocido aún no se ha hecho avance alguno.

## **El error cartográfico: la calidad de los mapas**

La calidad de los mapas originales puede ser un problema importante cuando no ha existido un control de calidad suficiente, especialmente en la precisión altimétrica. En Estados Unidos se sigue la regla del 90%: en las pruebas con puntos de control, el 90% de ellos deben tener un error menor a la mitad del intervalo entre curvas de nivel. En España, una gran parte de la cartografía de gran escala ha sido generada por muy diversos organismos o empresas con parámetros de calidad desconocidos.

Los errores de los mapas originales se suman, por tanto, a los ya estudiados del propio proceso de digitalización. Pueden diferenciarse los siguientes componentes:

- **error altimétrico absoluto** del mapa o error máximo admitido en los procesos fotogramétricos
- **propagación del error planimétrico a la altimetría**: el error planimétrico se establece habitualmente en 0,2 mm de la escala del mapa. Su efecto en la altitud es proporcional a la tangente de la pendiente del terreno

- **deformaciones dimensionales** del mapa, debidas a alteraciones en la temperatura y humedad

En cuanto a la magnitud de la suma de errores, Tahiri y Donnai (1995) presentan un modelo de valoración del error entre cuyos resultados cabe destacar la presencia de ECMs de 5 a 10 m para mapas 1:50.000 con 10 m de intervalo entre curvas de nivel. Estos datos pueden prevenir sobre los errores iniciales del mapa que va a ser digitalizado ya que en el peor de los casos —una zona con fuerte relieve— el ECM iguala al intervalo entre curvas y el error máximo lo triplica.

### La deformación de los mapas

La deformación del mapa topográfico debido a cambios dimensionales provoca **errores globales que afectan a la totalidad de los datos** del modelo. Cuando los datos van a usarse en procesos de análisis y modelización es aconsejable realizar un estricto control de las dimensiones del problema desde el primer momento.

Cabe destacar que la detección y corrección de este tipo de errores sólo es posible cuando se trata de deformaciones globales. Esto significa que problemas tan usuales como los dobleces en los mapas pueden ser muy difíciles de corregir por tratarse de deformaciones locales.

La medida de este tipo de error puede realizarse con criterios estadísticos a partir de un conjunto de puntos de control localizados con precisión. El problema se plantea básicamente como una transformación de coordenadas, desde un sistema original deformado a otro de referencia, habitualmente un sistema de proyección geográfica.

Los programas de digitalización suelen tener incorporadas utilidades para realizar la corrección desde el principio pero también es posible realizarlo a posteriori mediante procesos de ajuste que la mayoría de los SIG poseen.

El método de corrección se ejecuta en tres pasos:

- se establece una serie de puntos de control cuya localización se conoce con exactitud en ambos sistemas de coordenadas
- se establecen unas funciones de transformación entre ambos sistemas, calculadas a partir de los puntos de control
- se aplican las funciones de transformación sobre los puntos de control para conocer la magnitud del error
- en caso de que el error sea aceptable, se realiza la transformación global aplicando las funciones a la totalidad de puntos

Las funciones de transformación suelen estimarse de forma independiente para las abscisas y para las ordenadas. Definiendo con el subíndice T a las coordenadas originales —tablero, por ejemplo— y con G a las finales —sistema de proyección—, se tienen las siguientes expresiones generales:

$$\hat{x}_G = \zeta_x(x_T, y_T); \hat{y}_G = \zeta_y(x_T, y_T)$$

En la mayoría de los casos, las funciones anteriores se estiman aplicando métodos estadísticos de los cuales el más utilizado es el de superficies de tendencia, en el que las funciones  $\zeta$  se calculan mediante regresión múltiple o ecuaciones polinómicas estimadas por el método de mínimos cuadrados. Se han propuesto funciones diferentes (Goshtasby, 1986, 1988) pero el método

polinómico es el más utilizado.

El grado del polinomio de ajuste puede ser variable. Cuando vale 1 es posible efectuar transformaciones afines, es decir, operaciones de translación, rotación y cambio de escala. Los grados superiores permiten recuperar distorsiones geométricas más complejas. En el primer caso, las ecuaciones de transformación se reducen a un plano de regresión:

$$\hat{x}_G = a_{00} + a_{10} \cdot x_T + a_{01} \cdot y_T; \hat{y}_G = b_{00} + b_{10} \cdot x_T + b_{01} \cdot y_T$$

La estimación del error cometido en la transformación: se realiza comparando las coordenadas de los puntos de control con las resultantes de aplicar las funciones de transformación sobre los mismos puntos. El error suele estimarse como error cuadrático medio, ECM, separable para las componentes  $x$  e  $y$ :

$$ECM_x = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (\hat{x}_{G_i} - x_{G_i})^2}$$
$$ECM_y = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (\hat{y}_{G_i} - y_{G_i})^2}$$

El límite aceptable para el error cuadrático máximo de los puntos o para el ECM debe fijarse en función de la aplicación a la que va destinado el MDE, así como de la escala de partida, primer determinante de la precisión geométrica de un modelo. En la digitalización manual puede proponerse un límite empírico que sería la distancia que corresponde a 0,25 mm del mapa a la escala de trabajo. Con un original a escala 1:50.000 este valor es de 12,5 m y corresponde aproximadamente a la precisión máxima que un operador experimentado puede obtener en la digitalización manual.

En caso de errores excesivos deben examinarse individualmente los puntos de control para comprobar si existe alguno especialmente anómalo. Posteriormente, puede variarse el grado de la transformación para intentar mejores ajustes. De forma general, la transformación de primer grado sólo permite efectuar ajustes lineales por lo que, si el mapa está distorsionado, serán necesarias previsiblemente transformaciones de grado superior. Existe un límite práctico derivado de la precisión de los cálculos implicados en las operaciones matriciales necesarias.

Finalmente, debe destacarse que los puntos de control del mapa se digitalizan manualmente por lo que una introducción descuidada puede una causa complementaria de error muy significativa.

## La medida del error atributivo

Como ya se ha indicado, en el error atributivo puede afectar tanto a los modelos vectoriales como a los matriciales. En el primer caso, la mayoría de las veces se trata de errores locales, equivocaciones al asignar la altitud a las curvas de nivel o a los puntos acotados.

En este caso, la forma más simple de detectar el problema es trazar perfiles paralelos en diversas direcciones y examinar visualmente los resultados. La corrección se realiza manualmente actualizando en la base de datos el registro que describe la curva errónea. También es posible y útil generar un MDE matricial y, a partir de él, modelos derivados. Algunos de ellos permiten ver fácilmente los errores debido a las irregularidades en la distribución de las variables — especialmente, pendientes y sombreado—.

En el caso de los modelos matriciales, el error puede considerarse de tres tipos posibles:

- grandes errores —*blunders*—; su magnitud excede el máximo error permitido. Son de naturaleza local y deben ser eliminados completamente
- errores sistemáticos, que presentan un patrón de distribución concreto e introducen un sesgo en el MDE. En caso de existir, son predecibles y pueden ser eliminados o, al menos, reducidos
- error aleatorio, que permanece tras la eliminación de los anteriores y que suelen presentar una distribución de Gauss. Este error es global y se origina en las imprecisiones de los datos originales y en los múltiples procesos de generalización, interpolación, etc. que se ejecutan en su construcción

## Análisis del error aleatorio

En un MDE matricial, las elevaciones  $\hat{z}$  pueden interpretarse como la suma de la altitud real,  $z$ , y un factor de error:  $\hat{z} = z + e$ . Los parámetros que definen la distribución del error pueden deducirse a partir de un conjunto muestral de puntos de control —*check points*— para los que se conoce la altitud real.

Los puntos de control se consideran "verdaderos", es decir, medidos sin error, por lo que deben ser definidos mediante métodos precisos. El método más utilizado es extraer las altitudes de mapas preexistentes de la mayor escala posible, con la confianza de manejar errores desconocidos pero moderados. Probablemente el uso de los GPS adquiera aquí pleno sentido, al permitir establecer un conjunto de puntos de control con precisión conocida y que, en los casos de usar GPS diferencial, pueden tener una precisión suficiente para el control de calidad.

## Valoración del error

El error local en un punto  $i$ ,  $e_i$  se define como la diferencia entre la altitud en el MDE y la del punto de control. Dado un conjunto de  $n$  puntos de control, el error medio, EM, para este conjunto de datos se define como:

$$EM = \bar{e} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n e_i$$

El error medio para un conjunto dado de puntos de control tiene interés para comprobar si las desviaciones del modelo son aleatorias o no. En el primer caso, EM no será significativamente diferente de cero. Sin embargo, como las desviaciones positivas y negativas se anulan, el EM no es una medida válida de la calidad del MDE.

Lo más habitual es utilizar el error cuadrático medio, ECM, que se calcula mediante la expresión:

El uso de estos estadísticos permite una evaluación objetiva de la calidad de los MDE si, del mismo modo que en el caso de la cartografía convencional, se plantean unas reglas de calidad o baremos para los MDE. Para la aplicación de un baremo se asume que los grandes errores han sido corregidos, así como los posibles errores sistemáticos y sólo resta la componente aleatoria.

## La influencia de los puntos de control

¿Cuántos puntos de control son necesarios para conocer el error de un MDE? Li (1991) plantea

el concepto de fiabilidad —*reliability*— del control de calidad, en el sentido de que los resultados de éste dependen de la calidad y cantidad de los puntos de control. Utilizar un gran número de puntos requiere asimismo un esfuerzo importante para conseguir fijarlos con precisión. Debe, por tanto, fijarse un número mínimo de puntos para conseguir una meta de fiabilidad concreta en el control de calidad. Ley (1986) plantea el uso de 150 puntos para garantizar que la medida del error tendrá una desviación estándar del 10%. Li (1991) presenta un análisis teórico más completo y concluye una ecuación general

$$R(e) = \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}} \times 100\%$$

donde  $e$  es la medida del error en términos de desviación estándar —equivalente al ECM cuando no hay sesgo, es decir, cuando  $EM=0$ —;  $R(e)$  es la fiabilidad de la medida del error, asimismo en términos de desviación estándar —el error del error—; finalmente,  $n$  es el número de puntos de control. Para 150 puntos de control, el valor de  $R(e)$  es del 6%, similar al propuesto por Ley (1986).

La muestra mínima necesaria para una fiabilidad  $R(e)$  será:

[...]

Por tanto, si se desea evaluar el error con una fiabilidad del 10%, — $R(e)=0.10$ —serán necesarios 51 puntos de control. Inversamente, si se ha obtenido un error de  $R(e)=25$  m con 50 puntos de control, sabemos la desviación estándar del error es de 2,5 m, un 10% de la medida. En consecuencia, los límites de confianza del 95% para el error estarán en el rango de  $25 \pm 1,96 \sigma$ :  $25 \pm 4,9$  m.

En la selección de los puntos de control debe tenerse en cuenta que el muestreo debe ser representativo de las estructuras topográficas presentes en la zona. Por este motivo, el uso de la red geodésica no es aconsejable ya que los puntos tienden a encontrarse en las cimas y otros lugares destacados. Sí es posible, en cambio, utilizar la red como apoyo para añadir otros puntos de control en zonas diferentes o utilizar el método GPS para conseguir una red representativa con una distribución adecuada.

## **Análisis de los grandes errores**

En ausencia de sesgo, los grandes errores se definen como aquéllos cuya magnitud excede el triple del ECM.

Como ya se ha indicado, este tipo de errores son esporádicos y de naturaleza local, es decir, se producen errores que sólo afectan a una pequeña fracción del área total. Las técnicas de detección y medida suelen ser también locales y se basan generalmente en hipótesis sobre la continuidad en los valores de la pendiente.

El origen de estos errores puede estar en causas diversas, incluso por los métodos automáticos de estereocorrelación, que pueden tener problemas debido al bajo contraste de las imágenes, a ambigüedades por la existencia de texturas periódicas sobre el terreno o a reflejos (Hannah, 1981:63). Cuando los modelos se construyen por transformaciones de archivos vectoriales previos, los conflictos pueden originarse en errores preexistentes o en el comportamiento de los algoritmos de interpolación utilizados en zonas problemáticas.

Es posible utilizar métodos puramente visuales para la localización de este tipo de errores (USGS, 1997). Para ello se realizan representaciones mediante bloques-diagrama, coloreado de

bandas de gradientes hipsométricos, vistas estereoscópicas mediante anaglifos y simulaciones de iluminación.

Sin embargo, el análisis visual no garantiza un examen exhaustivo y metódico ni puede definirse claramente un umbral de error, sino que la presencia o ausencia de error queda al criterio subjetivo del operador. Por este motivo es recomendable usar métodos automáticos donde, normalmente, un punto se comprueba usando los valores de los puntos más próximos o "vecinos". Los vecinos se definen mediante una "ventana" superpuesta al modelo, que delimita una fracción del mismo. En general, las ventanas suelen ser cuadradas —incluyen la misma cantidad de filas y columnas— y simétricas —el punto problema se sitúa en el centro de la ventana, lo que implica una dimensión impar—.

En el análisis más simple se calculan las diferencias de altitud entre el punto problema y sus vecinos. El punto se etiqueta si alguna de estas diferencias exceden un valor máximo

predefinido. Llamando  $e$  a la condición de error, se tiene:  $e \leftarrow \text{cierto} \quad |d_i| \geq d_{max}$ .

Analizando el MDE por filas o columnas, si sólo se detecta un valor conflictivo puede suponerse un punto de ruptura de pendiente. La detección de dos señales de alarma secuenciales es un indicador de que el punto implicado en ambos cálculos es probablemente erróneo.

Hannah (1981) propone pruebas más completas, basadas en el conjunto de los vecinos más próximos de cada punto, y utilizando tanto los valores de pendiente como los de cambio de pendiente. En ellas se utilizan valores umbral para ambos parámetros con el fin de detectar puntos conflictivos.

Estas pruebas, sin embargo, no tienen un valor estadístico, en el sentido de que no ofrecen una medida de verosimilitud o probabilidad para el valor de la cota sometida a prueba. En Felicísimo (1994) se propone un sencillo método que tiene tres propiedades de interés con respecto a los anteriores:

- es un método objetivo, donde los umbrales de error se determinan mediante métodos estadísticos.
- la probabilidad de que un punto sea erróneo puede conocerse.
- los valores umbral se deducen de los datos propios del modelo, por lo que se adaptan a las características del relieve de la zona estudiada —con unos valores propios de pendiente, rugosidad, etc.—

La base del test reside en el análisis de las diferencias existentes entre dos valores de altitud para cada punto: la presente en el MDE —correcta o errónea— y un valor estimado mediante un proceso de interpolación a partir de las cotas vecinas. Para un punto situado en la fila  $i$ , columna  $j$ , el valor interpolado es:

$$\hat{z}_{i,j} = (z_{i,j-1} + z_{i,j+1} + z_{i-1,j} + z_{i+1,j})/4$$

La diferencia entre la cota del modelo y la cota estimada es [...]

El proceso se realiza para el total de los  $n$  puntos del MDE y se obtiene la diferencia media y su desviación estándar: [...]

los valores anteriores definen la función de distribución de las diferencias, una distribución de Gauss, que permite realizar un test de significación para los valores individuales de las diferencia. Con este test se puede aceptar o rechazar la hipótesis de que el valor individual de

desviación observado pertenece a la población de desviaciones. Para ello se utiliza un test de la  $t$  de Student, que debe realizarse para cada punto del modelo calculando el valor del estadístico mediante la expresión:

El valor anterior se considera una desviación tipificada y se compara su magnitud con el valor [...]; como el número de datos del modelo digital será habitualmente muy elevado, se usa el valor infinito para los grados de libertad. El modelo digital constituye la población, por lo cual los valores que definen la distribución pueden considerarse parámetros poblacionales y no estadísticos muestrales.

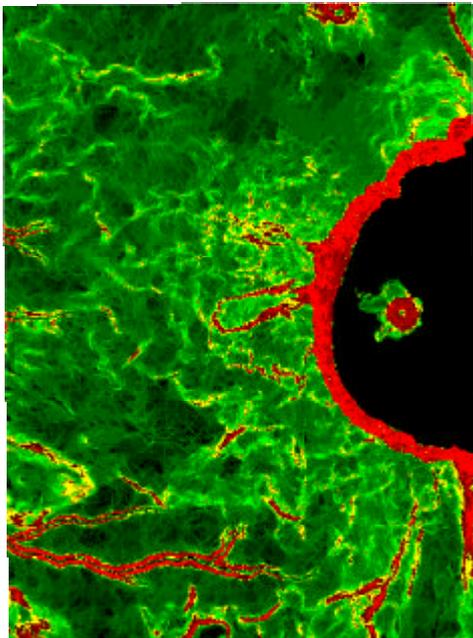
La probabilidad de error de Tipo I puede definirse con el fin de detectar solamente las diferencias muy significativas. En consecuencia, la condición de error vendrá dada, por ejemplo, por [...].

La hipótesis nula es  $H_0 : d_{i,j} = \bar{d}$ .

La localización de puntos con un valor de  $t$  significativamente elevado no implica necesariamente un error de cota pero es un buen indicador de alarma.

## La propagación del error

Las operaciones con números inciertos permiten obtener resultados inciertos. Esta circunstancia aconseja controlar estrictamente el error cuando las medidas van a ser utilizadas en la determinación de otras magnitudes a través de procesos de simulación. La influencia del error en la incertidumbre de un resultado se denomina propagación del error e ignorarlo puede conducir a dar por válidos resultados que no lo son en absoluto.



**Modelo digital de pendientes de una misma zona. El MDP presenta en el documento original una leyenda con intervalos de 5°. El error en el MDE puede hacer que estas categorías, y especialmente las de pendiente menor, sean imprecisas hasta el punto de invalidar el modelo para algunos usos donde se exige una valoración precisa de las zonas de poca inclinación.**

La influencia del error en los procesos derivados del MDE ha sido mucho menos estudiada que el error de las fuentes. Los trabajos existentes tienen por objeto llamar la atención sobre los efectos de la propagación del error en algunas simulaciones, especialmente las relacionadas con las pendientes y orientaciones del terreno. Sin embargo, los métodos prácticos de "vivir con el error" en una base de datos cartográfica y de controlar sus efectos de forma general no están aún claros.

En el caso de la realización práctica de modelizaciones, se han citado tres formas de tratar el

problema de propagación del error (Hunter y Goodchild, 1994:771):

- omitir toda referencia al mismo
- proporcionar un descriptor estadístico
- proporcionar varios productos finales dentro del posible rango de variación

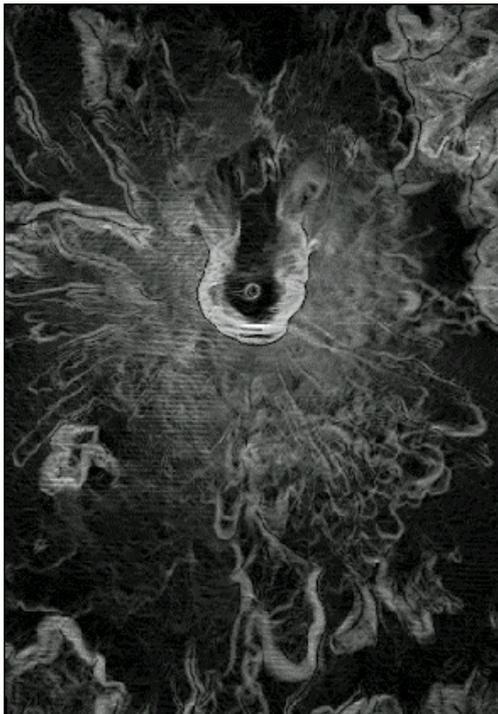
El primer caso es, sin duda, el más frecuente y la forma más simple de tratar el problema, pero obviarlo puede tener consecuencias negativas en función de las decisiones que se tomen a partir de la información defectuosa.

En el segundo caso se presenta información sintética mediante descriptores como las bandas  $\epsilon$ , los valores de ECM, etc. Estas medidas pueden poner sobre aviso de la calidad de los datos por lo que suponen un avance notable sobre la primera actitud. Sin embargo, no dan cuenta de los posibles efectos del error en el producto final cuando éste es el resultado de una modelización compleja.

Con el último planteamiento se presentarían diferentes resultados generados dentro del rango de error real con el fin de ilustrar las variaciones permitidas por la incertidumbre de los datos originales.

Queda, finalmente, una cuarta opción que la presentación de los resultados clave para una decisión asociados a su nivel de incertidumbre y no de forma determinística estricta. Por ejemplo, si es necesario delimitar las zonas con pendiente menor de  $5^\circ$ , el modelo que se presente puede tener una frontera difusa entre la clase  $p < 5^\circ$  y el resto,  $p \geq 5^\circ$  con un significado similar a la banda  $\epsilon$ .

Las normas de propagación del error no son necesariamente simples, por lo que su solución analítica puede ser inabordable. Asimismo, dependen estrechamente de los algoritmos utilizados y, ocasionalmente, pueden cambiar en función de las características del relieve de la zona.



**Modelo de pendientes. La aparición de "terrazas" en el MDP es una señal de alarma sobre la calidad del MDE o la correcta aplicación de los métodos de interpolación.**

## El análisis de sensibilidad

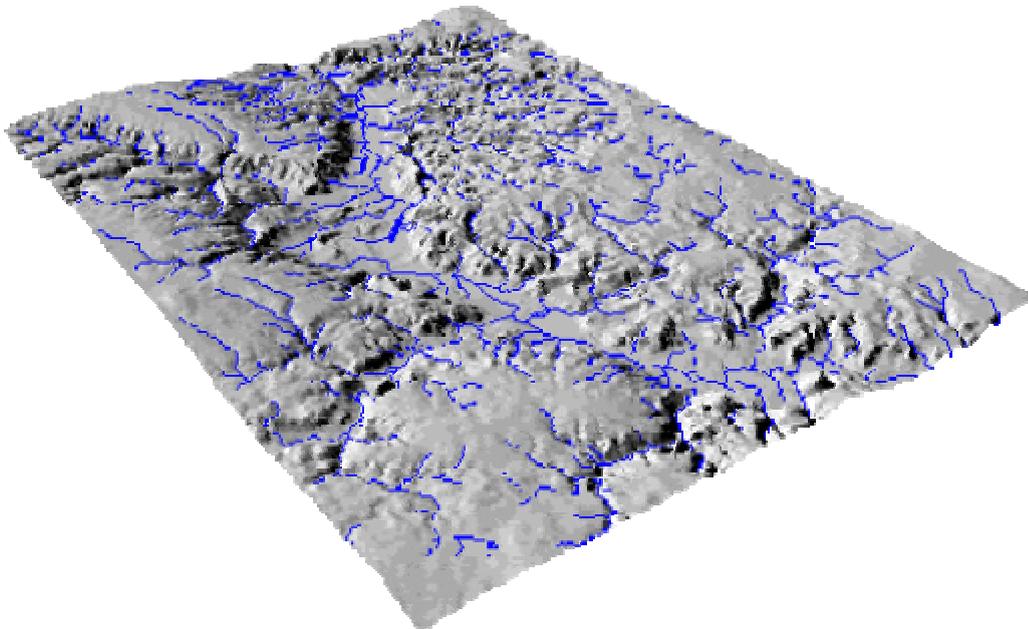
La propagación del error se ha estudiado habitualmente realizando un análisis de sensibilidad del proceso concreto. El análisis se realiza generando diferentes modelos de error para los datos originales y estudiando los resultados producidos. Se trata, por tanto, de producir a partir de un MDE original, otros MDE con diversos grados de distorsión y generar el producto. El análisis de los resultados pueden conducir a comprender el fenómeno de propagación del error y su influencia en la calidad del resultado final.

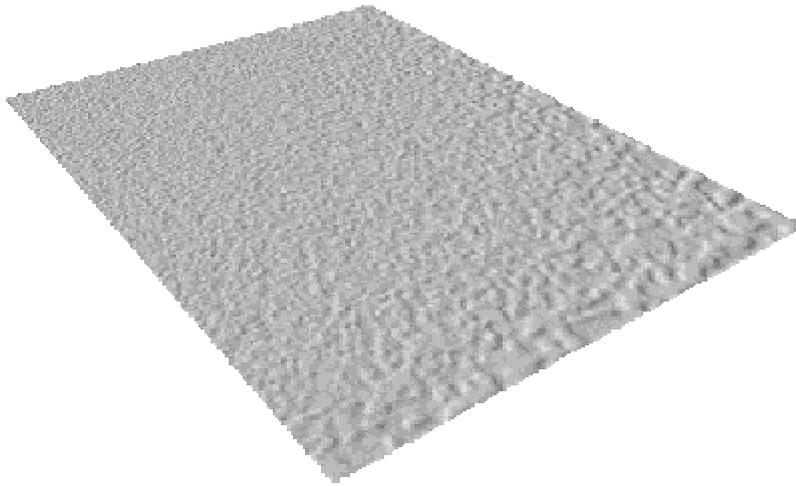
Habitualmente se asume que el error añadido al MDE original debe ser gaussiano y con media nula —es decir, tener una distribución normal y no presentar sesgo—. En muchos casos este modelo puede ser correcto pero hay autores que han propuesto también que el error puede presentar diferentes grados de autocorrelación —ver más adelante—.

En el primer caso el error se asigna a cada punto del MDE mediante un algoritmo generador de ruido aleatorio. La magnitud del error depende del ECM, para el cual deben ensayarse varios valores. La altitud en un punto se modifica de acuerdo con la expresión:

$$z'_{i,j} = z_{i,j} + e_{i,j}$$

donde  $z_{ij}$  es la altitud en el MDE original y  $z'_{ij}$  es el dato modificado mediante la adición del componente aleatorio  $e_{ij}$ , el factor de ruido generado de acuerdo con una distribución  $N(0,ECM)$ .





**Un método de análisis de la sensibilidad de los modelos ante el error es añadir ruido aleatorio al MDE original y realizar la simulación con los dos modelos. La comparación de los resultados es indicativa de la robustez del método de trabajo y de la sensibilidad ante los errores.**

Por ejemplo, los trazados de la red hidrológica difieren notablemente entre ambos modelos, sin y con error (arriba y a la derecha respectivamente)

## **Los métodos de Monte Carlo**

Los métodos de Monte Carlo son una potente herramienta de trabajo cuando la solución analítica del problema es difícil. El método implica:

- la suposición de las distribuciones de probabilidad de las variables influyentes y
- el uso de generadores de números aleatorios para muestrear de forma simulada la población de sucesos.

A partir de los puntos anteriores es posible generar modelizaciones numéricas del proceso en número suficiente como para construir empíricamente la función de probabilidad de la variable resultado.

Los métodos de Monte Carlo han comenzado a ser prácticos y útiles cuando los ordenadores han estado disponibles de forma generalizada. Los generadores de números aleatorios son rutinas bien conocidas con las cuales es posible generar series de números cuyas distribuciones pueden ajustarse a múltiples modelos.

En el caso que se trata aquí, podemos asumir un error gaussiano o con cierto grado de autocorrelación. Los errores serán añadidos a datos simulados y aplicados los algoritmos que ejecutan la simulación. De los resultados podemos deducir las características de la propagación del error.

Felicísimo (1995) aplica este método al análisis de la propagación del error altitudinal al cálculo de la pendiente. Los pasos seguidos son los siguientes:

- se genera un MDE con valores de altitud iguales, simulando un terreno plano

- se genera un valor de error para cada punto de acuerdo con una distribución de Gauss  $N(0,ECM)$
- la altitud de cada punto se altera añadiéndole el valor de error
- se calcula la pendiente en cada punto de acuerdo con el algoritmo que se desee utilizar
- se construye la distribución de los valores de la pendiente resultantes de la modelización y se compara con la distribución del MDE "real"

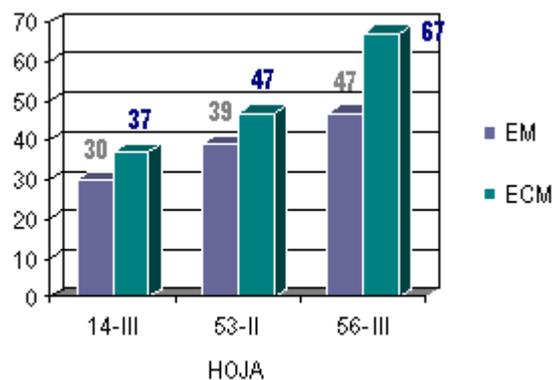
Obviamente, la pendiente esperada en ausencia de error es nula ya que el MDE de partida muestra un terreno plano. Los resultados más notorios son los siguientes:

- la distribución del error en la pendiente no es de media nula lo que significa que la construcción de un modelo digital de pendientes a partir de un MDE infravalora las pendientes bajas proporcionalmente a la magnitud del error en el MDE
- el error medio de la pendiente en función del ECM es el siguiente:

ECM	5%	10%	20%
<b>Error</b>	1.4°	2.9°	5.8°

el ECM se establece en porcentaje del tamaño de la malla del MDE; por ejemplo, para un MDE de 30 m de intervalo entre datos, un ECM del 10% corresponde a 3 m

- del análisis de frecuencias de error acumuladas, se deducen los siguientes resultados: para un MDE con ECM=10%, el 50% de los datos tendrán un error de al menos 2°; el 25% de 3,5° y el 5% de 5° o más
- un MDE con ECM=20%, el 50% de los datos tendrán un error de al menos 5°; el 25% de 7° y el 5% de 11° o más
- en el caso de un MDE con pendiente superior a 0°, la influencia del error disminuye proporcionalmente a la misma



**Diagrama de síntesis con los resultados del error en tres zonas de diferente relieve (ver texto)**

## El efecto de la autocorrelación

Cuando la distribución espacial del error en el MDE no es completamente aleatoria —aunque pueda serlo su distribución estadística—, interviene un nuevo factor: la intensidad de la autocorrelación.

Hunter y Goodchild (1994) analizan el efecto de la correlación del error en la estimación de la radiancia normalizada,  $L(h)$ . Para ello generan errores de altitud para valores de correlación  $r$  entre 0 —correlación nula— y 0,245. Los MDE resultantes son utilizados para la estimación de valores de reflectancia mediante el cálculo del ángulo de incidencia de un vector solar dado sobre la superficie. El MDE original tiene 30 m de luz y se le ha estimado un ECM real de 10 m.

Manteniendo el ECM constante, se muestra que tanto el error medio como la desviación estándar de la radiancia normalizada aumenta ligeramente en el rango  $0 < r < 0,20$  para disminuir rápidamente si la correlación aumenta.

Dado que el rango de  $L(h)$  no se aporta en el trabajo, es imposible establecer comparaciones relativas. En el caso de que el rango de variación de  $L(h)$  sea 0-255 como es habitual, la desviación estándar máxima observada —13 unidades— correspondería a un 5% en términos relativos.

Canters (1994:176) indica también que cuando el error presenta cierto grado de autocorrelación, las consecuencias sobre el producto final son menos graves que cuando el error es estrictamente gaussiano. Canters analiza la influencia del error en el cálculo de la pendiente en un modelo TIN e indica que existe una alta sensibilidad ante la autocorrelación. Encuentra que si el error de altitud está correlacionado, los errores en la pendiente son menores —lo cual no es especialmente sorprendente—. Señala, en consecuencia, que ignorar la autocorrelación en la propagación del error puede suponer una seria sobreestimación del error en los resultados. Canters resalta asimismo la dependencia entre la pendiente del terreno y el error en el mismo sentido que el señalado anteriormente: el error aleatorio influye en menor grado en zonas de fuerte pendiente que en zonas llanas.

## El error y el relieve

En las simulaciones anteriores se han supuesto unos valores de ECM constantes para todo el modelo de elevaciones, a partir de la cuales se han realizado las simulaciones en todos los casos.

Los análisis realizados sobre MDE reales indican, sin embargo, que existe una dependencia entre el ECM y la morfología del terreno que no debe ser obviada en las modelizaciones. En Felicísimo (1994:70) se muestran los resultados de analizar en error en 3 zonas de la serie MDT200 del Instituto Geográfico Nacional. Los modelos de esta serie están generados a partir de mapas de isohipsas con 100 m entre curvas de nivel y presentan una luz de 200 m.

Las zonas seleccionadas presentan valores de pendiente diferentes y corresponden a zonas topográficamente muy distintas:

Zona	Topografía	P media
1	Rasa litoral, antigua plataforma de abrasión marina	1°
2	Modelado fluvial en zona de media montaña	10°
3	Modelado glaciar e intensa actividad kárstica en alta montaña	22°

La estimación del error se ha realizado por comparación con mapas topográficos 1:25.000. Los puntos de control han sido los vértices de la cuadrícula UTM de 1km —salvo los puntos sobre el

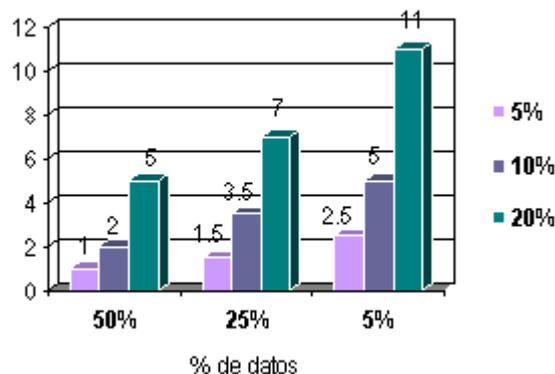
mar—.

Los resultados se muestran en la tabla siguiente —EM: error medio; entre paréntesis, el error estándar de la media—:

Zona	Puntos de control	EM	ECM
1	113	16 (3.1)	37
2	113	-5 (4.2)	47
3	126	2 (5.9)	67

Los estadísticos resultantes muestran dos circunstancias de interés:

- el error medio es significativamente diferente de cero en la Zona 1, lo que indica un sesgo: las altitudes están sobrevaloradas con respecto a la realidad
- el ECM aumenta perceptiblemente con la pendiente media de la zona, circunstancia ya descrita por otros autores (Hutchinson, 1991:47); en la Zona 3 alcanza el 33% del tamaño de malla



**Diagrama con los resultados del análisis de propagación del error en la creación del modelo digital de pendientes (ver texto)**

La consecuencia previsible de este efecto es que, aunque puede darse un valor de ECM para una zona amplia, la magnitud real del error será previsiblemente diferente si esta zona contiene regiones con diferentes características topográficas. Los análisis sobre la propagación del error podrán, por tanto, incorporar esta dependencia entre el error y el relieve para mejorar los modelos.

**FIN DEL CAPÍTULO**