



ÍNDICE DE CONTENIDO.

<b>1</b>	<b>Resumen histórico.</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Análisis del problema de torsión uniforme: formulación clásica.</b>	<b>6</b>
2.1	Introducción.	6
2.2	Torsión de barras circulares.	7
2.3	Barras circulares huecas.	14
2.4	Tubos de pared delgada.	15
2.4.1	Relación entre el flujo cortante $f$ (en consecuencia, el esfuerzo $\tau$ ) con el par $T$ que actúa sobre el tubo.	18
<b>3</b>	<b>Análisis del problema de torsión uniforme: formulación diferencial.</b>	<b>25</b>
3.1	Introducción.	25
<b>4</b>	<b>Resolución numérica con elementos de contorno.</b>	<b>31</b>
4.1	Representación integral de la solución del problema.	31
4.2	Resolución numérica.	31
4.3	Cálculo de parámetros característicos de torsión.	33
4.4	Verificación de resultados.	35
4.5	Validez para otro tipo de perfiles.	36
<b>5</b>	<b>Representación gráfica de los resultados numéricos.</b>	<b>38</b>
<b>6</b>	<b>Conclusiones.</b>	<b>47</b>
<b>7</b>	<b>Código del programa “TORSIÓN”.</b>	<b>48</b>
<b>8</b>	<b>Bibliografía.</b>	<b>68</b>



## ÍNDICE DE FIGURAS.

<i>fig. 1 Barra sujeta a torsión cargada por pares de torsión <math>T_1</math> y <math>T_2</math>.</i>	6
<i>fig. 2 Barra circular sometida a torsión pura.</i>	7
<i>fig. 3 Detalle de barra circular sometida a torsión pura.</i>	8
<i>fig. 4 Esfuerzos cortantes longitudinales en una barra circular.</i>	10
<i>fig. 5 Esfuerzos de tensión y compresión que actúan sobre un elemento orientado a <math>45^\circ</math> del eje longitudinal.</i>	11
<i>fig. 6 Barra circular hueca.</i>	14
<i>fig. 7 Tubo de pared delgada con forma de sección transversal arbitraria.</i>	16
<i>fig. 8 Detalle de tubo de pared delgada con forma de sección transversal arbitraria.</i>	16
<i>fig. 9 Sección transversal de un tubo de pared delgada.</i>	18
<i>fig. 10 Tubo circular de pared delgada.</i>	21
<i>fig. 11 Tubo rectangular de pared delgada.</i>	22
<i>fig. 12 Barra circular sometida a esfuerzo torsor constante.</i>	25
<i>fig. 13 Tensiones cortantes en una sección rectangular, según Navier.</i>	26
<i>fig. 14 Cilindro de sección arbitraria sometido a torsión pura.</i>	27
<i>fig. 15 Influencia entre dos elementos de contorno.</i>	32
<i>fig. 16 Aproximación de las derivadas del alabeo unitario.</i>	33
<i>fig. 17 Sección rectangular: Alabeo.</i>	38
<i>fig. 18 Sección rectangular: Cortante.</i>	38
<i>fig. 19 Sección cuadrada: Alabeo.</i>	39
<i>fig. 20 Sección cuadrada: Cortante.</i>	39
<i>fig. 21 Sección elíptica: Alabeo.</i>	40



fig. 22 Sección elíptica: Cortante .....	40
fig. 23 Sección triangular: Alabeo .....	41
fig. 24 Sección triangular: Cortante .....	41
fig. 25 Sección circular: Alabeo .....	42
fig. 26 Sección circular: Cortante .....	42
fig. 27 Fleje: Alabeo .....	43
fig. 28 Fleje: Cortante .....	43
fig. 29 Perfil delgado cerrado: Alabeo .....	44
fig. 30 Perfil delgado cerrado: Cortante .....	44
fig. 31 Perfil L: Alabeo .....	45
fig. 32 Perfil L: Cortante .....	45
fig. 33 Perfil IPE: Alabeo .....	46
fig. 34 Perfil IPE: Cortante .....	46

## ÍNDICE DE TABLAS.

Tabla 1 Comparación de resultados. (T= Teórico; N = Numérico) .....	35
Tabla 2 Influencia del mallado para la sección rectangular .....	36
Tabla 3 Aplicación a perfiles delgados .....	37



## 1 RESUMEN HISTÓRICO.

Se puede afirmar que con las aportaciones de Navier y Cauchy el camino de la teoría de la elasticidad quedó perfectamente perfilado.

A partir de aquí surge un grupo numeroso de investigadores que contribuyeron con sus aplicaciones y publicaciones al desarrollo significativo de esta disciplina.

El desarrollo espectacular de la elasticidad que tiene lugar durante el siglo XIX no está exento de controversias, como la célebre controversia de la constante elástica, en la que Poisson y Cauchy tomaron posiciones junto a Navier que aseguraba la completa definición de la elástica de un cuerpo isótropo mediante una sola constante. Finalmente se impuso la teoría de Green que demostraba que eran necesarias 2 constantes para definir el comportamiento mecánico de un sólido elástico e isótropo y 21 para un material anisótropo.

Adhemar\_J.C. Barré de Saint Venant (1797-1886) realizó importantes estudios de flexión y torsión de la pieza prismática, aportando ideas que siguen siendo válidas en nuestros días. Destacó por su lucha contra la falta de confianza en las investigaciones científicas de muchos ingenieros y constructores de la época, que ante el déficit de soluciones rigurosas que proporcionaba la teoría de la elasticidad, defendían el uso de las fórmulas empíricas de diseño. Treinta años más tarde su alumno Valentín-Joseph Boussinesq (1842-1929) recogió sus sugerencias y las presentó en la fórmula generalmente aceptada hoy día como “*principio de Saint Venant*”.

La segunda mitad del siglo XX está marcada por el surgimiento del ordenador, lo que permitió el impulso de los métodos numéricos y variacionales impulsados por Runge y Ritz.

Por otra parte, los métodos de las diferencias finitas promovido por Southwell, el de Rayleigh-Ritz, el de Galerkin y el de Treft para la solución del problema elástico adquieren nuevas dimensiones y mayores perspectivas con el uso del ordenador. Así, basándose en el método de Rayleigh-Ritz se desarrolla el método de los elementos finitos. De las ideas asociadas al método de Treft surge el método integral de Contorno



adecuado a todos los problemas de campo. El desarrollo de estos métodos ha continuado hasta nuestros días, permitiendo la resolución de problemas en dos y tres dimensiones, y convirtiendo los problemas estructurales en problemas de cálculo numérico, mallado, teoría de errores, etc.



## 2 ANÁLISIS DEL PROBLEMA DE TORSIÓN UNIFORME: FORMULACIÓN CLÁSICA.

### 2.1 Introducción.

La *torsión* se refiere al torcimiento de un miembro estructural cuando se carga con momentos que producen rotación alrededor de su eje longitudinal. Este tipo de carga se representa en la fig. 1, que muestra una barra recta, empotrada en un extremo y cargada con dos pares de fuerzas. Cada pareja de fuerzas forma un par que tiende a girar la barra alrededor de su eje longitudinal. El momento de un par de fuerzas es igual al producto de una de las fuerzas por la distancia entre sus líneas de acción; así que, el primer par tiene un momento  $T_1 = P_1 d_1$  y el segundo tiene un momento  $T_2 = P_2 d_2$ .

Los pares que producen torcimiento de una barra, tales como  $T_1$  y  $T_2$  de la fig. 1, se denominan *momentos torsionantes, pares de torsión* o *torques*.

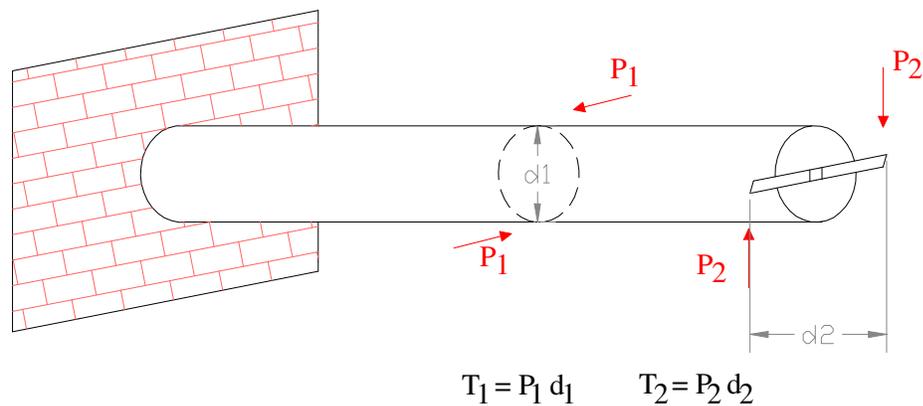


fig. 1 Barra sujeta a torsión cargada por pares de torsión  $T_1$  y  $T_2$ .



## 2.2 Torsión de barras circulares.

Consideremos una barra o eje de sección transversal circular sujeta a torsión por pares  $T$  aplicados en sus extremos fig. 2. Una barra cargada en esta forma se considera sometida a *torsión pura*. Si se considera la simetría, se demuestra que las secciones transversales de la barra circular giran como cuerpos rígidos alrededor del eje longitudinal, los radios permanecen rectos y la sección transversal permanece plana y circular. También, si el ángulo de torsión total es pequeño, no variarán la longitud de la barra ni su radio.

Durante la torsión ocurrirá una rotación alrededor del eje longitudinal, de un extremo de la barra respecto al otro. Por ejemplo, si se fija el extremo izquierdo de la barra, entonces el extremo derecho girará un pequeño ángulo  $\phi$  con respecto al extremo izquierdo fig. 2. El ángulo  $\phi$  se conoce como *ángulo de torsión*. Además, una línea longitudinal en la superficie de la barra, tal como la línea  $mn$ , girará un pequeño ángulo a la posición  $mn'$ . Debido a esta rotación, un elemento infinitesimal rectangular sobre la superficie de la barra, tal como el elemento de longitud  $dx$ , adquiere la forma de un romboide.

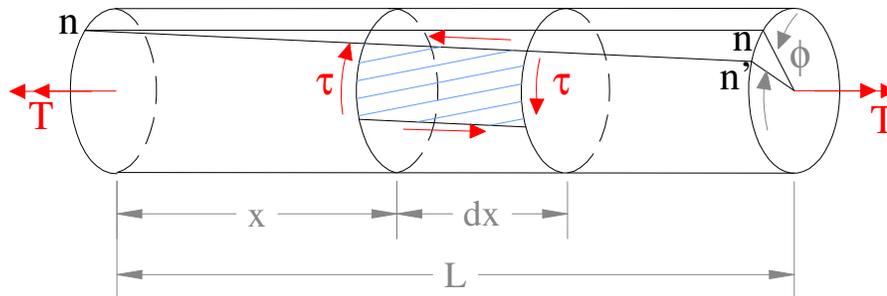


fig. 2 Barra circular sometida a torsión pura.

Este elemento se indica nuevamente en la fig. 3, donde la porción discoide se separa del resto de la barra. La configuración original del elemento se designa por  $abcd$ .



Durante la torsión la sección transversal derecha gira con respecto a la cara opuesta, y los puntos  $b$  y  $c$  se trasladan a  $b'$  y  $c'$ , respectivamente. Las longitudes de los lados del elemento no cambian durante esta rotación, pero los ángulos de las esquinas ya no miden  $90^\circ$ . Así, se aprecia que el elemento está en un estado de *cortante puro* y la magnitud de la deformación por cortante  $\gamma$  es igual a la disminución en el ángulo recto en  $a$ . Esta reducción en el ángulo es:

$$\gamma = \frac{bb'}{ab} \quad (1)$$

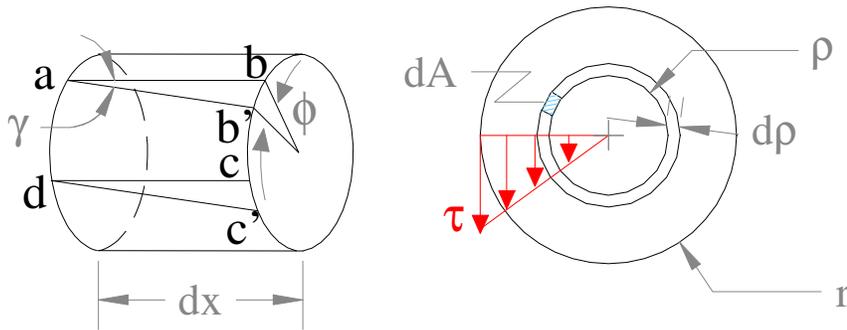


fig. 3 Detalle de barra circular sometida a torsión pura.

La distancia  $bb'$  es la longitud de un arco pequeño de radio  $r$  subtendido por el ángulo  $d\phi$ , que es el ángulo de rotación de una sección transversal con respecto a la otra. De esta manera, se determina que  $bb' = rd\phi$ . Además, la distancia  $ab$  es igual a  $dx$ , la longitud del elemento. Al sustituir estas cantidades en la ecuación anterior, se obtiene una expresión similar a la deformación por cortante.

$$\gamma = \frac{r \cdot d\phi}{dx} \quad (2)$$

La cantidad  $d\phi/dx$  representa la razón de cambio del **ángulo de torsión**  $\phi$ . Tanto  $\phi$ , como  $d\phi/dx$  son funciones de  $x$ . Se indicará la cantidad  $d\phi/dx$  mediante el símbolo  $\theta$  y se referirá como ángulo de torsión por unidad de longitud.



$$\gamma = \frac{r \cdot d\phi}{dx} = r \cdot \theta \quad (3)$$

En el caso de torsión pura, la razón de cambio  $d\phi/dx$  es constante en toda la longitud de barra, ya que cada sección transversal está sometida al mismo par. Por lo tanto, se obtiene:

$$\theta = \frac{\phi}{L} \quad (4)$$

Donde:

$L$  es la longitud de la barra.

La ecuación (3) resulta:

$$\gamma = r \cdot \theta = \frac{r \cdot \phi}{L} \quad (5)$$

Estas ecuaciones se basan únicamente en conceptos geométricos y son válidas para una barra circular de cualquier material, tanto elástico como inelástico, lineal o no lineal.

El esfuerzo cortante  $\tau$  en la barra circular tiene los sentidos mostrados en la fig. 2. Para un material linealmente elástico, esos esfuerzos cortantes se relacionan con las deformaciones angulares por medio de la Ley de Hooke en cortante; por lo tanto, se obtiene:

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot r \cdot \theta \quad (6)$$

Donde:

$G$  es el módulo de elasticidad en cortante.

Las ecuaciones (4), (5), (6) relacionan las deformaciones y los esfuerzos, para un elemento en la superficie de la flecha, con el ángulo de torsión por unidad de longitud.



Las deformaciones y esfuerzos en el interior de la barra pueden determinarse en forma similar a la empleada para un elemento en la superficie de la misma. Dado que los radios de las secciones transversales de la barra permanecen rectos y sin alteración durante la torsión, se aprecia que lo explicado previamente para un elemento  $abcd$  de la superficie exterior sirve también para un elemento similar situado en la superficie de un cilindro interior de radio  $\rho$  (fig. 3). Por lo tanto, tal elemento interior también se encuentra en un estado de cortante puro con su deformación angular y su esfuerzo cortante correspondientes representados por las ecuaciones siguientes:

$$\gamma = \rho \cdot \theta \quad (7)$$

$$\tau = G \cdot \rho \cdot \theta \quad (8)$$

Estas ecuaciones establecen que la deformación angular y el esfuerzo cortante en una barra circular varían linealmente con la distancia radial  $\rho$  desde el centro y tienen sus valores máximos para un elemento de la superficie externa. La distribución de esfuerzo sobre la sección transversal de la barra se ilustra en la fig. 3 mediante el diagrama de esfuerzo triangular.

Los esfuerzos cortantes que actúan en el plano de la sección transversal se acompañan de esfuerzos cortantes de la misma magnitud que actúan sobre planos longitudinales de la barra, fig. 4.

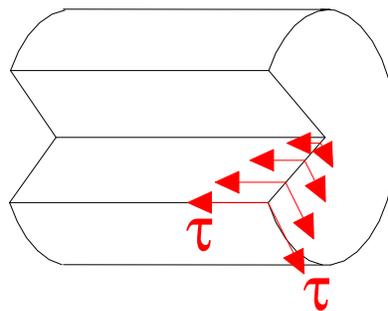


fig. 4 Esfuerzos cortantes longitudinales en una barra circular.



Este resultado proviene del hecho de que siempre existen esfuerzos iguales en planos mutuamente perpendiculares. Si un material es más frágil en cortante sobre planos longitudinales que sobre planos de secciones transversales, como en el caso de una barra circular hecha de madera, las primeras fracturas debidas a la torsión aparecerán sobre la superficie en dirección longitudinal.

El estado de esfuerzo cortante puro en la superficie de la flecha fig. 2 equivale a esfuerzos de tensión y compresión iguales sobre un elemento girado un ángulo de  $45^\circ$ . Por lo tanto, un elemento rectangular con lados a  $45^\circ$  respecto al eje de la flecha estará sometido a los esfuerzos de tensión y compresión señalados en la fig. 5. Si una barra sujeta a torsión está hecha de un material que es más frágil en tensión que en cortante, la falla ocurrirá por tensión a lo largo de una hélice a  $45^\circ$  respecto al eje. Es fácil demostrar este tipo de falla si se tuerce un pedazo de tiza o gis ordinario.

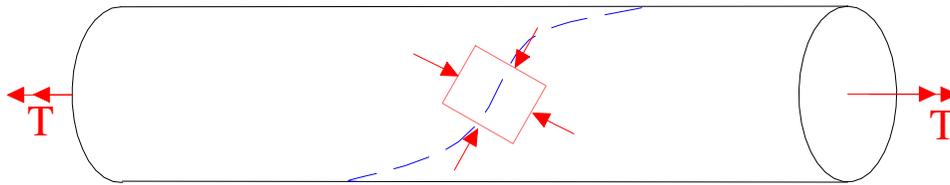


fig. 5 Esfuerzos de tensión y compresión que actúan sobre un elemento orientado a  $45^\circ$  del eje longitudinal.

La relación entre el par aplicado  $T$  y el ángulo de torsión  $\phi$ , fig. 2, puede determinarse si se parte de la condición de que el momento resultante de los esfuerzos cortantes que actúan sobre la sección transversal fig. 3 debe ser estáticamente equivalente al par aplicado  $T$ . La fuerza cortante que actúa sobre un elemento de área  $dA$  es  $\tau dA$ , y el momento de esta fuerza respecto al eje de la barra es  $\tau \rho dA$ . Mediante la ecuación (8) se establece que este momento es igual a  $G\theta\rho^2 dA$ . El momento torsionante



total  $T$  constituye la suma, sobre toda el área de la sección transversal, de tales momentos elementales; así,

$$T = \int G \cdot \theta \cdot \rho^2 \cdot dA = G \cdot \theta \cdot \int \rho^2 \cdot dA = G \cdot \theta \cdot I_p \quad (9)$$

En la cual

$$I_p = \int \rho^2 \cdot dA \quad (10)$$

Es el **momento polar de inercia** de la sección transversal circular. Para un círculo de radio  $r$  y diámetro  $d$ , el momento polar de inercia es:

$$I_p = \frac{\pi \cdot r^4}{2} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \quad (11)$$

De la ecuación (9) obtenemos:

$$\theta = \frac{T}{G \cdot I_p} \quad (12)$$

La cual muestra que  $\theta$ , el ángulo de torsión por unidad de longitud, es directamente proporcional al momento torsionante  $T$  e inversamente proporcional al producto  $GI_p$ , conocido como la **rigidez torsional total** de la barra. El ángulo de torsión total  $\phi$ , igual a  $\theta L$ , es:

$$\phi = \frac{T \cdot L}{G \cdot I_p} \quad (13)$$

El ángulo de torsión  $\phi$  se mide en radianes. Si se emplean unidades del Sistema Internacional, el momento torsionante  $T$  debe expresarse en Newton metros (Nm), la longitud  $L$  en metros (m), el módulo de elasticidad en cortante  $G$  en Pascals (Pa) y el momento polar de inercia  $I_p$  en metros a la cuarta potencia ( $m^4$ ).

La cantidad  $GI_p/L$  es la **rigidez torsional** (unitaria) de una barra circular, y representa el momento requerido para producir un ángulo de rotación unitario de un extremo respecto al otro. También, la **flexibilidad torsional** se define como el recíproco



de la rigidez torsional, o sea  $L/GI_p$ , y es igual a la rotación producida por un momento unitario. Las expresiones anteriores son análogas a la de rigidez axial  $EA/L$  y de flexibilidad axial  $L/EA$ .

La ecuación (13) se utiliza para determinar el módulo de elasticidad en cortante  $G$  para varios materiales. Por medio de la realización de una prueba de torsión sobre un espécimen circular, puede determinarse el ángulo de torsión  $\phi$  producido por un momento torsionante  $T$  conocido. Luego puede calcularse la magnitud  $G$  mediante la ecuación (13).

El **esfuerzo cortante máximo**  $\tau_{max}$  en una barra circular sometida a torsión puede determinarse al sustituir la expresión para  $\theta$  (12) en la expresión para  $\tau$  (6); así,

$$\tau_{max} = \frac{T \cdot r}{I_p} \quad (14)$$

Esta ecuación, que se conoce como **fórmula de torsión**, establece que el máximo esfuerzo cortante es proporcional al momento de torsión aplicado  $T$  y al radio  $r$ , e inversamente proporcional al momento polar de inercia de la sección transversal.

Al sustituir:

$$r = \frac{d}{2} \quad I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$$

La expresión (14) se transforma en la expresión (15)

$$\tau_{max} = \frac{16 \cdot T}{\pi \cdot d^3} \quad (15)$$

como la fórmula para el esfuerzo cortante máximo en una barra sólida. El esfuerzo cortante a una distancia  $\rho$  del centro es:

$$\tau = \frac{T \cdot \rho}{I_p} \quad (16)$$



Las unidades del esfuerzo cortante son Pascals (Pa) si se emplean unidades del Sistema Internacional.

### 2.3 Barras circulares huecas.

Las barras huecas son mucho más eficaces para resistir cargas torsionales que las barras macizas. Los esfuerzos cortantes en una barra circular enteramente sólida son máximos en el perímetro de la sección transversal y nulos en el centro. Por lo tanto, mucho del material en una barra eje no hueca se esfuerza considerablemente por debajo del esfuerzo cortante permisible. Si son importantes una reducción del peso y un ahorro de material, entonces se aconseja utilizar barras huecas.

El análisis de la torsión de una barra circular hueca es casi idéntico al de una barra sólida. Las deducciones presentadas anteriormente para una barra maciza no cambian esencialmente si la barra es hueca, por ello, se pueden emplear las mismas expresiones básicas para la deformación angular  $\gamma$  y el esfuerzo cortante  $\tau$ . Por supuesto, la distancia radial  $\rho$  que aparece en tales expresiones se limita al margen de  $r_1$  a  $r_2$ , donde  $r_1$  es el radio interior y  $r_2$  es el radio exterior de la barra circular. fig. 6.

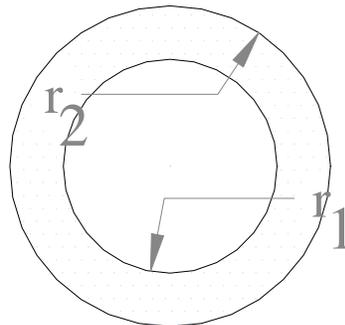


fig. 6 Barra circular hueca.

La relación entre el momento aplicado  $T$  y el ángulo de torsión por unidad de longitud  $\theta$  se representa por la ecuación (9), excepto que los límites sobre la integral para el momento polar de inercia  $I_p$  (véase ecuación 10) son  $\rho = r_1$  y  $\rho = r_2$ . Luego  $I_p$ , que es el momento polar de inercia del área anular indicada en la fig. 6, es:



$$I_p = \frac{\pi}{2} \cdot (r_2^4 - r_1^4) = \frac{\pi}{32} \cdot (d_2^4 - d_1^4) \quad (17)$$

Si el tubo es muy delgado (esto es, si su espesor  $t$  es pequeño comparado con su radio), entonces pueden emplearse las siguientes fórmulas aproximadas:

$$I_p \approx 2 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot t = \frac{\pi \cdot d^3 \cdot t}{4} \quad (18)$$

Donde:

$r$  y  $d$  son el radio y el diámetro medios, respectivamente.

Las ecuaciones para  $\theta$ ,  $\phi$ , y  $\tau$  obtenidas para una barra circular pueden utilizarse para una barra hueca cuando  $I_p$  se evalúa conforme a la ecuación (17) o, se opera con la ecuación (18). Por supuesto, el espesor de pared de una barra hueca debe ser suficiente para evitar la posibilidad de arrugamiento o pandeo de la pared.

## 2.4 Tubos de pared delgada.

La teoría de torsión descrita en las secciones anteriores es aplicable a barras de sección transversal circular, sólidas o huecas. Tales formas se emplean comúnmente para miembros sujetos a torsión, especialmente en maquinaria. Sin embargo, en estructuras ligeras, tales como aeronaves y naves espaciales, se requieren a menudo miembros tubulares de pared delgada y de formas no circulares, para soportar torsión.

Para obtener fórmulas que sean aplicables a una variedad de formas de sección, consideremos un tubo de pared delgada de forma de sección transversal arbitraria, fig. 7. El tubo es cilíndrico (esto es, todas las secciones transversales tienen las mismas dimensiones) y está sometido a torsión pura por pares  $T$  que actúan en los extremos. El espesor  $t$  de la pared del tubo puede variar alrededor de la sección transversal, pero se asume que  $t$  es pequeño comparado con el ancho total del tubo. Los esfuerzos cortantes  $\tau$  que actúan sobre las secciones transversales se ilustran en la fig. 8, que muestra un elemento del tubo recortado entre dos secciones transversales separadas una distancia



$dx$ . Los esfuerzos cortantes tienen direcciones paralelas a las orillas de la sección transversal, y “fluyen” alrededor del tubo. La intensidad de los esfuerzos cortantes varía tan ligeramente a través del espesor del tubo (porque se supuso que el tubo era delgado) que para muchos fines se considera que  $\tau$  es constante a través del espesor. Por supuesto, la manera en que varía  $\tau$  alrededor de la sección transversal debe determinarse de consideraciones de equilibrio.

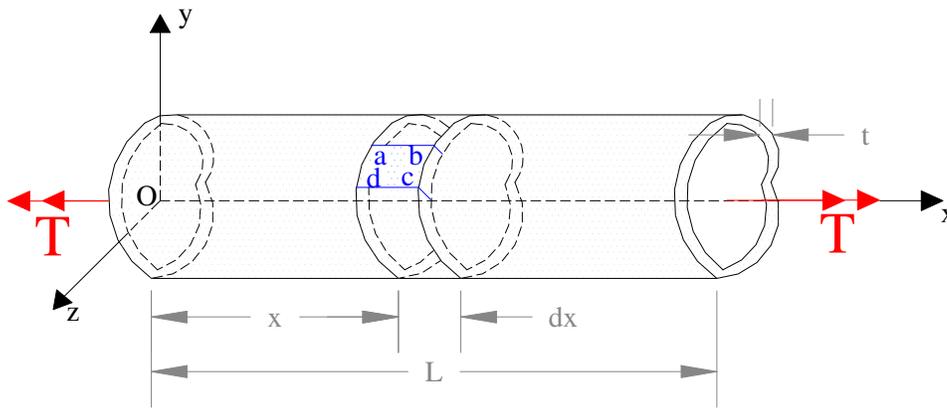


fig. 7 Tubo de pared delgada con forma de sección transversal arbitraria.

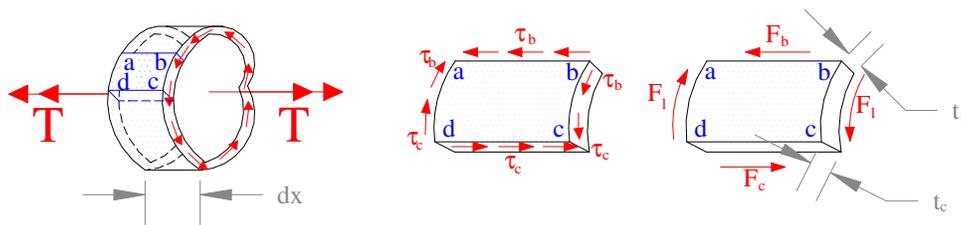


fig. 8 Detalle de tubo de pared delgada con forma de sección transversal arbitraria.



Para determinar la magnitud de los esfuerzos cortantes, considérese un elemento rectangular obtenido al efectuar dos cortes longitudinales  $ab$  y  $cd$  fig. 7 y fig. 8. Este elemento se separa como un cuerpo libre en la fig. 8. Sobre la cara de la sección transversal  $bc$  actúan los esfuerzos  $\tau$  mostrados en la fig. 8. Se supone que estos esfuerzos pueden variar en intensidad conforme se traslada a lo largo de la sección transversal desde  $b$  hasta  $c$ . Así que el esfuerzo cortante en  $b$  se denota por  $\tau_b$ , y en  $c$  se denota por  $\tau_c$ . Según sabemos del equilibrio en la otra cara de la sección transversal  $ad$ , actúan esfuerzos cortantes idénticos, pero en dirección opuesta. Sobre las caras longitudinales  $ab$  y  $cd$  actuarán esfuerzos cortantes de la misma magnitud que aquellos de las secciones transversales, ya que los esfuerzos cortantes sobre planos perpendiculares son de magnitudes iguales. Así, los esfuerzos cortantes constantes sobre las caras  $ab$  y  $cd$  son iguales a  $\tau_b$  y  $\tau_c$ , respectivamente.

Los esfuerzos cortantes que actúan sobre las caras longitudinales producen fuerzas  $F_b$  y  $F_c$ , fig. 8, que pueden determinarse al multiplicar los esfuerzos por las áreas sobre las que éstos actúan; así,

$$F_b = \tau_b \cdot t_b \cdot dx \quad (19)$$

$$F_c = \tau_c \cdot t_c \cdot dx \quad (20)$$

en las cuales  $t_b$  y  $t_c$  representan los espesores del tubo en  $b$  y  $c$ , respectivamente. Además, se producen fuerzas  $F_l$  debidas a los esfuerzos que actúan en las caras  $bc$  y  $ad$ . Pero estas fuerzas no se incluyen en nuestro estudio. A partir del equilibrio del elemento en la dirección  $x$ , se aprecia que  $F_b = F_c$ , o sea:

$$\tau_b \cdot t_b = \tau_c \cdot t_c \quad (21)$$

Dado que la localización de los cortes longitudinales  $ab$  y  $cd$  se seleccionó arbitrariamente, se puede apreciar en la ecuación anterior que el producto del esfuerzo cortante  $\tau$  y el espesor  $t$  del tubo es el mismo en cada punto de la sección transversal. Este producto se conoce como el **flujo de cortante** y se denota por la letra  $f$ :

$$f = \tau \cdot t = \text{constante} \quad (22)$$



Así, el máximo esfuerzo cortante se presenta cuando el espesor del tubo es más pequeño y viceversa. Por supuesto, en las regiones donde el espesor es constante, el esfuerzo cortante también lo es.

2.4.1 Relación entre el flujo cortante  $f$  (en consecuencia, el esfuerzo  $\tau$ ) con el par  $T$  que actúa sobre el tubo.

Considérese un elemento de área  $A$ , de longitud  $ds$  en la sección transversal fig. 9. La distancia  $s$  se mide a lo largo de la **línea media** de la sección transversal (mostrada en la figura como una línea punteada). La fuerza cortante total que actúa en el elemento de área  $f ds$ , y el momento de esta fuerza alrededor de cualquier punto  $O$  es:

$$dT = r \cdot f \cdot ds \quad (23)$$

Donde:

$r$  es la distancia perpendicular desde  $O$  hasta la línea de acción de la fuerza. Esta última es tangente a la línea media de la sección transversal en el elemento  $ds$ .

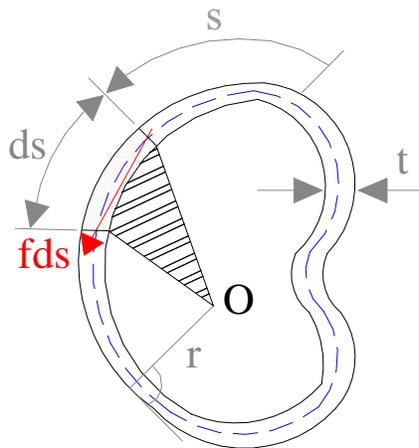


fig. 9 Sección transversal de un tubo de pared delgada.



El par total  $T$  producidos por los esfuerzos cortantes se obtiene al integrar a lo largo de toda la longitud  $L_m$  de la línea media de la sección transversal:

$$T = f \cdot \int_0^{L_m} r \cdot ds \quad (24)$$

La integral en esta expresión tiene una interpretación geométrica simple. La cantidad  $rds$  representa el doble del área del triángulo sombreado que se indica en la fig. 9; obsérvese que el triángulo tiene una longitud de base  $ds$  y una altura igual a  $r$ . Por lo tanto, la integral representa el doble del área  $A_m$  limitada por la línea media de la sección transversal; así,

$$T = 2 \cdot f \cdot A_m \quad (25)$$

De esta ecuación obtenemos:

$$f = \tau \cdot t = \frac{T}{2 \cdot A_m} \quad (26)$$

$$\tau = \frac{T}{2 \cdot t \cdot A_m} \quad (27)$$

A partir de estas ecuaciones se puede calcular el flujo de cortante  $f$  y los esfuerzos cortantes  $\tau$  para cualquier tubo de pared delgada.

El ángulo de torsión  $\phi$  puede calcularse al considerar la energía de deformación del tubo. Ya que los elementos del tubo están en cortante puro, la densidad de energía de deformación es  $\tau^2/2G$ . Por lo que la energía de deformación de un pequeño elemento del tubo, con área de sección transversal  $t ds$  fig. 9 y longitud  $dx$  fig. 7 y fig. 8 es:

$$dU = \frac{\tau^2}{2 \cdot G} \cdot t \cdot ds \cdot dx = \frac{\tau^2 \cdot t^2}{2 \cdot G} \cdot \frac{ds}{t} \cdot dx = \frac{f^2}{2 \cdot G} \cdot \frac{ds}{t} \cdot dx \quad (28)$$



Por lo tanto, la energía de deformación total del tubo es:

$$U = \int dU = \frac{f^2}{2 \cdot G} \cdot \int_0^{L_m} \left[ \int_0^L dx \right] \cdot \frac{ds}{t} \quad (29)$$

donde se considera el hecho de que el flujo cortante  $f$  es una constante y puede salir de los signos de integrales. También notamos que  $t$  puede variar con la posición alrededor de la línea media, por lo que debe permanecer bajo el signo de integral con  $ds$ . La integral interior es igual a la longitud  $L$  del tubo, por lo que la ecuación para  $U$  resulta:

$$U = \frac{f^2 \cdot L}{2 \cdot G} \cdot \int_0^{L_m} \frac{ds}{t} \quad (30)$$

Al sustituir el flujo cortante de la ecuación (26), obtenemos:

$$U = \frac{T^2 \cdot L}{8 \cdot G \cdot A_m^2} \cdot \int_0^{L_m} \frac{ds}{t} \quad (31)$$

como la ecuación para la energía de deformación del tubo en términos del par  $T$ .

La expresión para la energía de deformación puede formularse de manera más simple al introducir una nueva propiedad de la sección transversal que se conoce como la **constante de torsión**  $J$ . Para un tubo de pared delgada, la constante de torsión es:

$$J = \frac{4 \cdot A_m^2}{\int_0^{L_m} \frac{ds}{t}} \quad (32)$$

Con esta notación, la ecuación para la energía de deformación (31) resulta:

$$U = \frac{T^2 \cdot L}{2 \cdot G \cdot J} \quad (33)$$

En el caso especial de una sección transversal de espesor constante  $t$ , la expresión para  $J$  se simplifica a:

$$J = \frac{4 \cdot t \cdot A_m^2}{L_m} \quad (34)$$



Obsérvese que  $J$  tiene unidades de longitud a la cuarta potencia.

Para cada forma de sección transversal, se puede evaluar  $J$  con alguna de las ecuaciones anteriores (32) o (34). Por ejemplo, considérese un tubo circular de pared delgada fig. 10 de espesor  $t$  y radio  $r$  de la línea media y el área que limita son:

$$L_m = 2 \cdot \pi \cdot r \qquad A_m = \pi \cdot r^2 \qquad (35)$$

En consecuencia, la constante de torsión es:

$$J = 2 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot t \qquad (36)$$

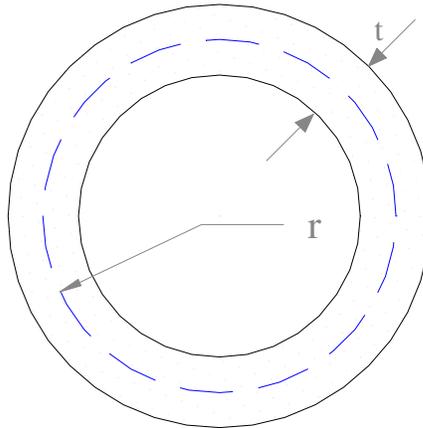


fig. 10 Tubo circular de pared delgada.

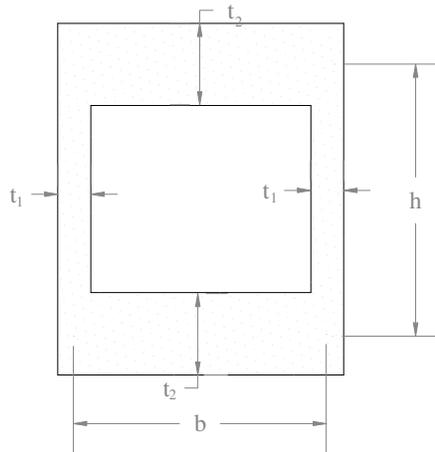


fig. 11 Tubo rectangular de pared delgada.

La fig. 11 muestra otro ejemplo; un tubo rectangular de pared delgada. El tubo tiene un espesor  $t_1$  en los lados y  $t_2$  en la cima y la base; la altura y el ancho (en la línea media de la sección transversal) son  $h$  y  $b$ , respectivamente. Para esta sección transversal, tenemos:

$$L_m = 2 \cdot (b + h) \qquad A_m = b \cdot h \qquad (37)$$

y

$$\int_0^{L_m} \frac{ds}{t} = 2 \cdot \int_0^h \frac{ds}{t_1} + 2 \cdot \int_0^b \frac{ds}{t_2} = 2 \cdot \left( \frac{h}{t_1} + \frac{b}{t_2} \right) \qquad (38)$$

Así, la constante de torsión es:

$$J = \frac{2 \cdot b^2 \cdot h^2 \cdot t_1 \cdot t_2}{b \cdot t_1 + h \cdot t_2} \qquad (39)$$



El ángulo de torsión  $\phi$  para un tubo de pared delgada puede determinarse al igualar el trabajo realizado por los pares aplicados  $T$  con la energía de deformación de la barra:

$$\frac{T \cdot \phi}{2} = \frac{T^2 \cdot L}{2 \cdot G \cdot J} \quad (40)$$

de donde:

$$\phi = \frac{T \cdot L}{G \cdot J} \quad (41)$$

Nuevamente se observa que la ecuación es de la misma forma que la correspondiente a una barra circular ecuación (13). El ángulo de torsión por unidad de longitud,  $\theta$ , puede obtenerse al dividir  $\phi$  por  $L$ ; así,

$$\theta = \frac{T}{G \cdot J} \quad (42)$$

La cantidad  $GJ$  se conoce en general como la **rigidez torsional** de una barra. En el caso de una barra circular, la constante de torsión  $J$  es el momento polar de inercia; en el caso de un tubo de pared delgada,  $J$  está dada por la ecuación (32). Para otras formas de sección transversal, se requieren diferentes fórmulas para  $J$ .

Considerando de nuevo el tubo de pared delgada fig. 10, el flujo de cortante y los esfuerzos cortantes en este tubo están dados por las fórmulas:

$$f = \frac{T}{2 \cdot \pi \cdot r^2} \quad \tau = \frac{T}{2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot t} \quad (43)$$

Éstas expresiones se obtienen al sustituir en las ecuaciones (26) y (27)

$$A_m = \pi \cdot r^2 \quad (44)$$

El ángulo de torsión es:

$$\phi = \frac{T \cdot L}{2 \cdot \pi \cdot G \cdot r^3 \cdot t} \quad (45)$$



Estos resultados concuerdan con los obtenidos de las ecuaciones derivadas anteriormente para una barra circular hueca. Si la barra hueca es de pared delgada, el momento polar de inercia es aproximadamente:

$$I_p = 2 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot t \quad (46)$$

que coincide con la ecuación (36) para  $J$ . Usando esta expresión para  $I_p$  en la fórmula de la torsión ecuación (14), se determina la ecuación (43) para  $\tau$ .

Si un tubo sometido a torsión tiene paredes muy delgadas, debe considerarse la posibilidad de pandeo de las paredes. Por ejemplo, un tubo circular largo construido de acero dulce se pandeará bajo esfuerzos de trabajo normales cuando la relación  $r/t$  es de alrededor 60. Por lo que, en este estudio se supone que el espesor de pared es lo bastante grande como para evitar el pandeo por torsión.



### 3 ANÁLISIS DEL PROBLEMA DE TORSIÓN UNIFORME: FORMULACIÓN DIFERENCIAL.

#### 3.1 Introducción.

Se considera un cilindro de sección transversal arbitraria, libre de tensiones en su superficie externa, fijado a uno de sus extremos y sometido a la acción de un momento torsor constante, fig. 12. Si la sección es circular, se puede obtener la solución exacta del problema de torsión, admitiendo que durante la torsión la sección permanece plana y efectúa un movimiento de rotación sin que exista distorsión según se ha observado en la teoría tradicional indicada anteriormente dada por *Coulomb* y aplicada con posterioridad por *Navier*, a cilindros cuya sección no es circular.

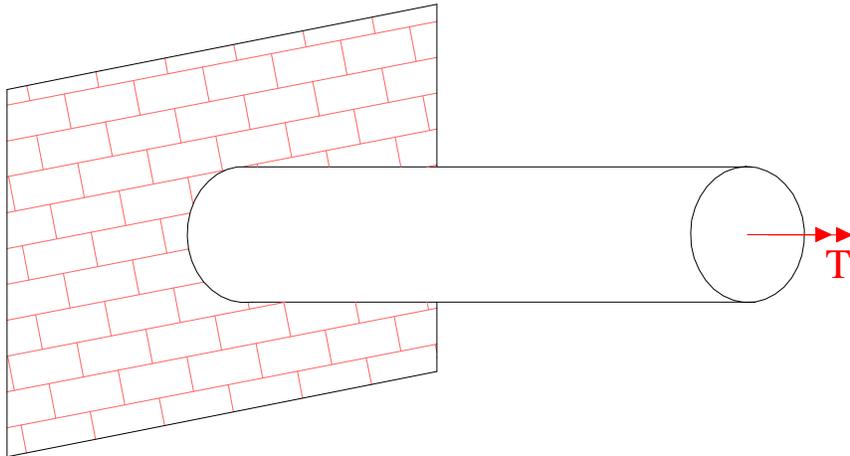


fig. 12 Barra circular sometida a esfuerzo torsor constante.

Aplicando la hipótesis mencionada anteriormente, *Navier* llegó a la conclusión errónea de que, para un momento torsor dado, el ángulo elemental de torsión es inversamente proporcional al momento de inercia polar respecto al centro de gravedad de la sección transversal considerada y que la tensión de cortante máxima se produce en los puntos más alejados del centro de gravedad de la sección. Es fácil comprobar que esta aseveración está en contradicción con las condiciones de contorno. Si se considera



una barra de sección rectangular resulta, según la *hipótesis de Navier*, que en todo punto del contorno la tensión de cortante debe llevar la dirección perpendicular al radio vector de posición de dicho punto respecto al centro de gravedad (véase fig. 13 ). Descomponiendo el cortante en dos componentes, según los ejes  $x$  e  $y$ , aparece una tensión cortante tangente a la frontera de la sección lo que contradice la hipótesis de ausencia de cargas exteriores sobre la superficie lateral de la barra.

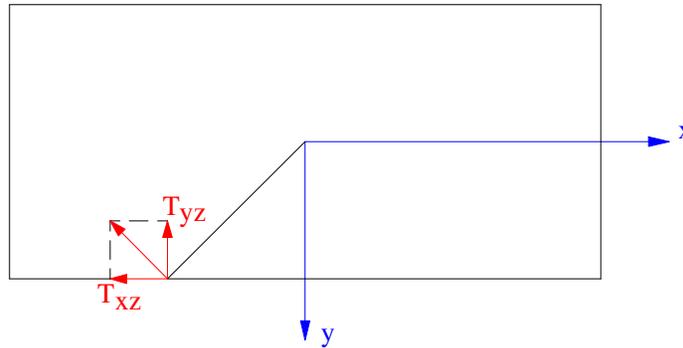


fig. 13 Tensiones cortantes en una sección rectangular, según Navier.

Si la sección no es rectangular no puede permanecer plana durante la deformación pero, si se admite que la proyección ortogonal de la sección deformada sobre la no deformada coincide con ésta, se dirá que la torsión es uniforme o pura. Además, la torsión uniforme se caracteriza porque el ángulo girado por la sección transversal varía linealmente con la longitud del cilindro.

Con las hipótesis mencionadas, observando la fig. 14 y denotando por  $r$  el vector de posición de un punto  $P$  antes de la deformación y por  $r'$  el vector en la posición resultante del giro, se puede escribir:

$$r' = r \cdot e^{i\theta} \Rightarrow \begin{cases} x' = x \cdot \cos\theta - y \cdot \text{sen}\theta \\ y' = x \cdot \text{sen}\theta + y \cdot \cos\theta \end{cases} \quad (47)$$

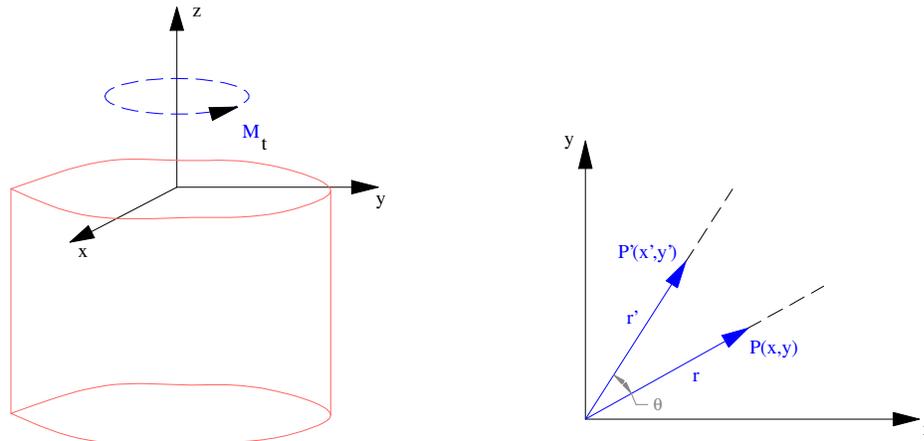


fig. 14 Cilindro de sección arbitraria sometido a torsión pura.

De donde se obtiene las componentes transversales del desplazamiento:

$$\begin{cases} u_x = x' - x = x \cdot (\cos \theta - 1) - y \cdot \text{sen } \theta \\ u_y = y' - y = y \cdot (\cos \theta - 1) + x \cdot \text{sen } \theta \end{cases} \quad (48)$$

Admitiendo pequeñas deformaciones, se puede aproximar:

$$\begin{cases} \text{sen } \theta \approx \theta \\ \cos \theta - 1 \approx 0 \end{cases} \quad (49)$$

Por lo que:

$$\begin{cases} u_x = -y \cdot \theta \\ u_y = x \cdot \theta \end{cases} \quad (50)$$

Llamando  $\alpha$  al ángulo girado por unidad de longitud y suponiendo que el desplazamiento axial de la sección transversal es función de las coordenadas de dicha sección, se obtiene la expresión de las componentes del desplazamiento:

$$\begin{cases} u_x = -\alpha \cdot z \cdot y \\ u_y = \alpha \cdot z \cdot x \\ u_z = \alpha \varphi(x, y) \end{cases} \quad (51)$$



Donde:

$\varphi(x,y)$  representa el alabeo unitario de la sección transversal, igual para todas ellas.

Conocidas las componentes de desplazamiento se determina el tensor de deformación, cuyas únicas componentes no nulas son:

$$\begin{cases} \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = \alpha \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = \alpha \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \end{cases} \quad (52)$$

De aquí, se deducen las componentes no nulas del tensor de tensiones, es decir, las tensiones cortantes:

$$\begin{cases} \tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} = \alpha \cdot G \cdot \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \\ \tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz} = \alpha \cdot G \cdot \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \end{cases} \quad (53)$$

Donde:

$G$  es el módulo de cizalladura del material constitutivo del cilindro sometido a torsión uniforme.

Para que se verifique el equilibrio debe cumplirse:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (54)$$

Donde se desprecian las fuerzas de gravedad. Derivando (53):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (55)$$

Además, como sobre la superficie lateral del cilindro no actúa ninguna fuerza, si  $(l, m)$  son las componentes del vector normal exterior a la misma, se tiene:



$$\tau_{xz} \cdot l + \tau_{yz} \cdot m = 0 \quad (56)$$

Sustituyendo (53) en (56):

$$l \cdot \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) + m \cdot \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) = 0 \quad (57)$$

Teniendo en cuenta que la derivada según la dirección de la normal puede escribirse en la forma:

$$l \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + m \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \quad (58)$$

Resulta como condición de contorno en cada punto  $(x,y)$  de la frontera de la sección transversal:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = y \cdot l - x \cdot m \quad (59)$$

La expresión (55) indica que el alabeo unitario  $\varphi$  es una función armónica en el interior del dominio  $\Omega$  que constituye la sección transversal de la pieza cilíndrica, limitado por la frontera  $\Gamma$  y toma sobre dicha frontera un valor que viene determinado por su derivada según la normal exterior a dicha frontera.

Por otro lado, el momento interno resultante de los cizallamientos tangentes a la sección estará dado por:

$$M_1 = \int_{\Omega} (y \cdot \tau_{xz} - x \cdot \tau_{yz}) \cdot d\Omega \quad (60)$$

Sustituyendo (53) en (60):

$$M_1 = \alpha \cdot G \cdot \int_{\Omega} \left( -x^2 - y^2 + y \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} - x \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \cdot d\Omega \quad (61)$$



Teniendo en cuenta el equilibrio de momentos la expresión para el momento torsor será:

$$M_t = \alpha \cdot G \cdot \int_{\Omega} \left( x^2 + y^2 - y \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \cdot d\Omega \quad (62)$$

Expresándola en la forma:

$$M_t = \alpha \cdot G \cdot J \quad (63)$$

Donde:

$$J = \int_{\Omega} \left( x^2 + y^2 - y \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \cdot d\Omega \quad (64)$$

Se denomina **módulo de torsión de la sección transversal**.

**Se resume el problema de la torsión uniforme con el siguiente enunciado:**

Buscar  $\varphi(x, y)$ , tal que:

$$\Delta \varphi = 0 \text{ en } \Omega \quad (65)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = y \cdot 1 - x \cdot m \text{ en } \Gamma$$

---

$$J = \int_{\Omega} \left( x^2 + y^2 - y \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \cdot d\Omega$$

$$\tau_{xz} = \frac{M_t}{J} \cdot \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right)$$

$$\tau_{yz} = \frac{M_t}{J} \cdot \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right)$$

$$\tau_{\max} = \max \left( \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} \right) \text{ en } \Omega$$

$$\alpha = \frac{M_t}{G \cdot J}$$



## 4 RESOLUCIÓN NUMÉRICA CON ELEMENTOS DE CONTORNO.

### 4.1 Representación integral de la solución del problema.

Sea  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  un abierto simplemente conexo y acotado,  $\Gamma = \partial\Omega$  frontera regular y  $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  armónica en  $\Omega$ . Si  $r = (x, y) \in \Omega$  y  $r' = (x', y') \in \Omega$ , al aplicar la segunda fórmula de Green a las funciones  $\varphi$  y  $\psi = \ln|r - r'|$  armónica en todo punto de  $r \neq r'$  en el dominio  $\Omega - S(r, \varepsilon)$ , donde  $S(r, \varepsilon)$  es un entorno de  $r$  de radio  $\varepsilon$ , contenido en  $\Omega$ , y pasar al límite:

$$\varphi(r) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{\Gamma} \left\{ \varphi(r') \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \cdot \frac{\partial \varphi(r')}{\partial n} \right\} d\Gamma \quad (66)$$

Donde:

$n$  es un vector unitario normal exterior a  $\Omega$

Si el punto está en la frontera y en ese punto está definida la tangente, se demuestra también que:

$$\varphi(r) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{\Gamma} \left\{ \varphi(r') \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \cdot \frac{\partial \varphi(r')}{\partial n} \right\} d\Gamma \quad (67)$$

De esta forma se puede resolver el problema de determinar el alabeo unitario utilizando las expresiones (66) y (67).

### 4.2 Resolución numérica.

Para cada punto  $(x, y) \in \Gamma$  la ecuación (67) se puede escribir:

$$\pi \cdot \varphi(r) - \int_{\Gamma} \varphi(r') \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} \cdot d\Gamma = - \int_{\Gamma} \psi \frac{\partial \varphi(r')}{\partial n} d\Gamma \quad (68)$$

Discretizando esta ecuación integral se obtiene un sistema de ecuaciones que permitirá encontrar los valores aproximados de  $\varphi$  en todo el contorno. Suponiendo la

frontera aproximada por una poligonal y considerando  $N$  segmentos sobre dicha poligonal. En la fig. 15 se observan dos de los segmentos (elementos de contorno), definidos por sus puntos extremos y caracterizados por su punto medio que constituye el nodo del elemento.

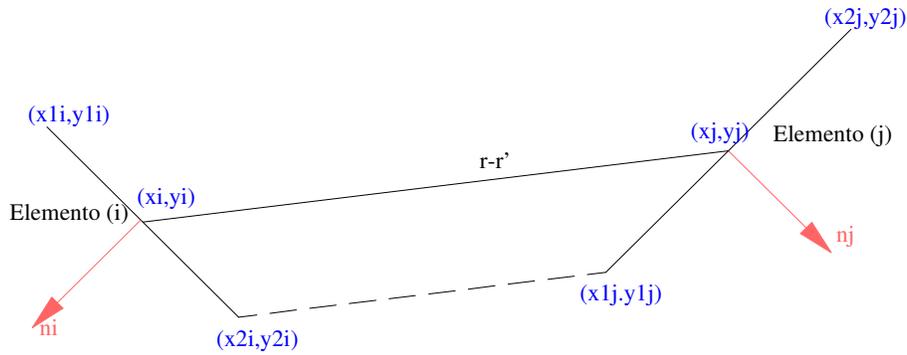


fig. 15 Influencia entre dos elementos de contorno.

Admitiendo que el alabeo unitario es constante sobre cada segmento, lo que será tanto mejor aproximación cuanto menor sea la longitud del elemento, se aproximan las integrales de la ecuación (68) por el sistema de ecuaciones:

$$\sum_{j=1}^N \varphi_j \cdot H_{ij} = Q_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (69)$$

Donde:

$$H_{ij} = -\frac{(x_i - x_j) \cdot l_j + (y_i - y_j) \cdot m_j}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad i \neq j \quad H_{ii} = \pi \quad (70)$$

$$Q_i = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (l_j \cdot y_j - m_j \cdot x_j) \cdot \ln[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] \cdot L_j \quad (71)$$

$$l_j = y_{2j} - y_{1j} \quad m_j = x_{1j} - x_{2j} \quad (72)$$

Por lo que el cálculo del alabeo unitario sobre la frontera se reduce a la resolución del sistema (70).

Para determinar  $\varphi$  en el interior de la sección transversal, se aproxima numéricamente la integral de la expresión (67), obteniéndose:

$$\varphi_i = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left( Q_i - \sum_{j=1}^N \varphi_j \cdot H_{ij} \right) \quad (73)$$

Donde:

El subíndice  $i$  se refiere al punto de  $\Omega$  considerado.

De esta forma, el problema de determinar el alabeo unitario está resuelto.

### 4.3 Cálculo de parámetros característicos de torsión.

Para determinar los demás parámetros de la torsión: módulo de torsión, componentes del cortante y cortante máximo, se necesita obtener las derivadas parciales primeras del alabeo unitario. Para ello se utiliza la fórmula de Gauss, aproximada numéricamente sobre una zona de un mallado bidimensional realizado sobre el dominio  $\Omega$ , tal como indica la fig. 16.

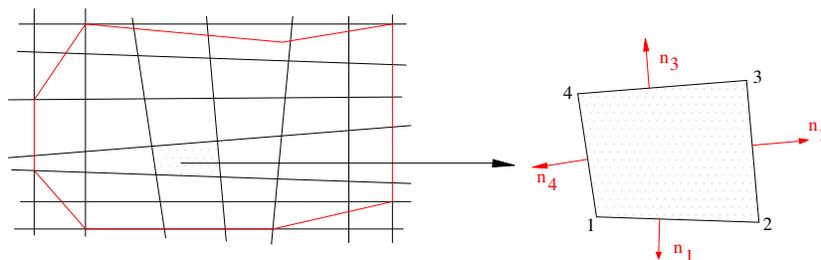


fig. 16 Aproximación de las derivadas del alabeo unitario.



Dada una zona de la malla, definida por sus cuatro nodos sobre los que se conocen el alabeo unitario denotado por  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  y  $\varphi_4$ . Si  $A$  es el dominio que incluye la zona, teniendo en cuenta el *teorema de Gauss*, se puede escribir:

$$\int_A \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dA = \int_{\Gamma} \varphi \cdot n_i \cdot d\Gamma \quad (74)$$

Definiendo el valor medio del gradiente como:

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{1}{A} \cdot \int_A \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot dA \quad (75)$$

Se obtiene:

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{1}{A} \cdot \int_{\Gamma} \varphi \cdot n_i \cdot d\Gamma \cong \frac{1}{A} \cdot \sum_{k=1}^4 \langle \varphi_k \rangle \cdot n_{ik} \cdot \Delta\Gamma_k \quad (76)$$

Donde:

$n_{ik}$  es la componente según la coordenada  $x_i$  del vector unitario normal exterior al lado  $k$  de la frontera del cuadrilátero;

$\Delta\Gamma_k$  es la longitud de dicho lado:

$\langle \varphi_k \rangle$  es el valor medio del alabeo unitario sobre el lado  $k$ , es decir, la semisuma de los valores del alabeo en los nodos extremos del segmento correspondiente.

Una vez calculadas las derivadas parciales del alabeo se obtiene el módulo de torsión de la sección en forma aproximada por medio de la expresión:

$$J = \sum_{j=1}^{\text{zonas}} \left( x_g^2 + y_g^2 - y_g \cdot \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle + x_g \cdot \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle \right) \cdot A_j \quad (77)$$

Donde:

$x_g$  e  $y_g$  son las coordenadas del centro de gravedad de cada zona del mallado.



De forma análoga se obtienen las aproximaciones de las componentes del cortante sobre cada zona:

$$\begin{cases} \tau_{xz} = \frac{M_t}{J} \cdot \left( \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\rangle - y_g \right) \\ \tau_{yz} = \frac{M_t}{J} \cdot \left( \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\rangle + x_g \right) \end{cases} \quad (78)$$

Así como la torsión, es decir, el ángulo que gira la sección por cada metro de longitud:

$$\alpha = \frac{M_t}{G \cdot J} \quad (79)$$

#### 4.4 Verificación de resultados.

Para dar validez al método desarrollado en los párrafos anteriores se han resuelto varios ejemplos para comparar los resultados obtenidos con los que proporciona la teoría clásica. En la Tabla 1 se resume la relación de secciones consideradas, sus dimensiones, los valores teóricos de la torsión y el cortante máximo y los obtenidos numéricamente.

Sección	Dimensiones	Alabeo máximo	Módulo-torsión	Torsión (T)	Torsión (N)	Tau-máx. (T)	Tau-máx. (N)
Rectangular	0,15 x 0,1	1,597 e-3	2,659 e-5	3,4014	3,7609	2,886e8	2,733e8
Cuadrada	0,1 x 0,1	5,18 e-4	1,273 e-5	7,110	7,854	4,807e8	4,806e8
Elíptica	0,4 x 0,3	4,015 e-3	1,355 e-3	0,0737	0,0737	1,110e7	1,360e7
T. equilátero	0,1	2,790 e-4	2,227 e-6	46,180	44,880	2,000e9	2,060e9
Circular	R=0,1	1,500 e-6	1,562 e-4	0,636	0,640	6,366e7	6,278e7
Fleje	0,2 x 0,015	6,055 e-4	6,167 e-6	444,44	16,213	6,666e9	2,610e9

Tabla 1 Comparación de resultados. (T= Teórico; N = Numérico)



En todos los casos se consideró un momento torsor aplicado igual a  $1e5$  N.m y el módulo de cizalladura del material igual a 1 GPa. Como puede observarse, la concordancia entre los resultados teóricos y los numéricos es muy alta excepto en el caso del fleje.

Con objeto de analizar la influencia del mallado, se estudiaron distintos mallados para el caso de la sección rectangular obteniéndose los resultados que se resumen en la Tabla 2.

Mallado	Tau-máx. (T)	Tau-máx. (N)	% Error
7 x 5	2,886e8	2,425e8	16,03
12 x 8	2,886e8	2,680e8	7,13
15 x 10	2,886e8	2,733e8	5,3
22 x 15	2,886e8	2,777e8	3,78
30 x 20	2,886e8	2,796e8	3,12

Tabla 2 Influencia del mallado para la sección rectangular.

Asimismo, se repitió un segundo análisis para el caso del fleje. Si los resultados que aparecen para esta sección en la Tabla 1 se corresponde con un mallado de  $66 \times 5$  zonas, se generó un nuevo mallado de  $133 \times 10$  zonas obteniéndose un valor del cortante máximo igual a  $5,06e9$ . Parece pues que en los perfiles muy delgados es necesario un mallado muy fino para obtener una precisión aceptable.

#### 4.5 Validez para otro tipo de perfiles.

Si bien la metodología presentada se ha desarrollado para perfiles de sección cerrada y dominios simplemente conexos, se puede extender a perfiles cerrados múltiplemente conexos y a perfiles abiertos de pared delgada. Para ello, se han verificado otros test cuyos resultados se representan en la Tabla 3.



<b>Tipo Perfil</b>	<b>Tau-máx (T)</b>	<b>Tau-máx (N)</b>
<b>Cerrado Rectangular</b>	4,166e7	1e8
<b>L</b>	1,0714e10	2,496e9
<b>IPE</b>	9,243e9	1,578e10

*Tabla 3 Aplicación a perfiles delgados.*

En todos los casos, el momento torsor aplicado y el módulo de cizalladura considerado coinciden con las de las secciones anteriores.

Puede observarse que ya no hay tan buena concordancia de resultados como en el caso de secciones maciza. Ello puede ser debido a la presencia de esquinas donde el cortante puede llegar a alcanzar valores elevadísimos y también, como ocurría en el caso del fleje, a la finura del mallado.

En las páginas que siguen se representan gráficamente los resultados de cada uno de los test realizados. En cada página se presenta una primera figura con los isovalores del alabeo y la segunda con los isovalores del cortante.



## 5 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS RESULTADOS NUMÉRICOS.

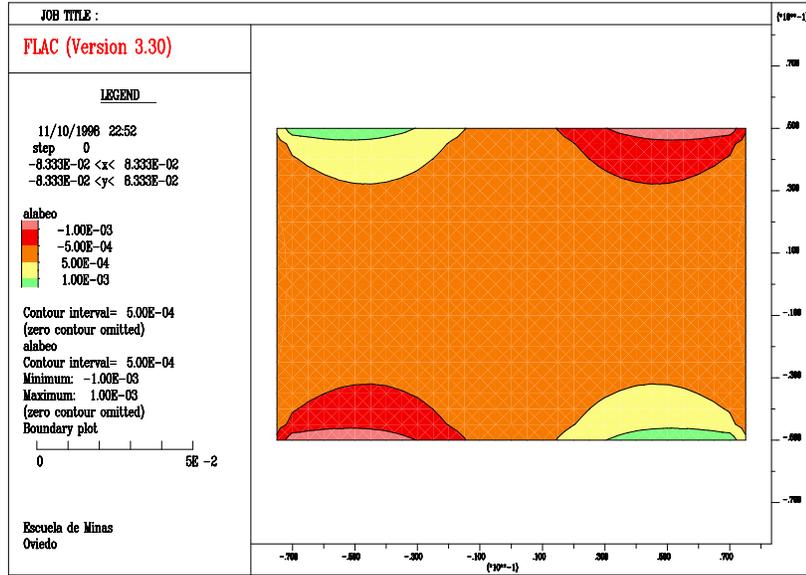


fig. 17 Sección rectangular: Alabeo.

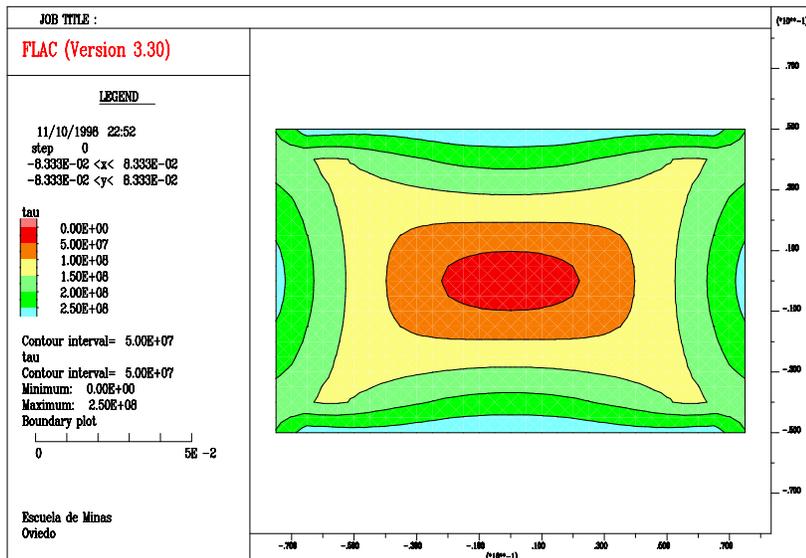


fig. 18 Sección rectangular: Cortante.

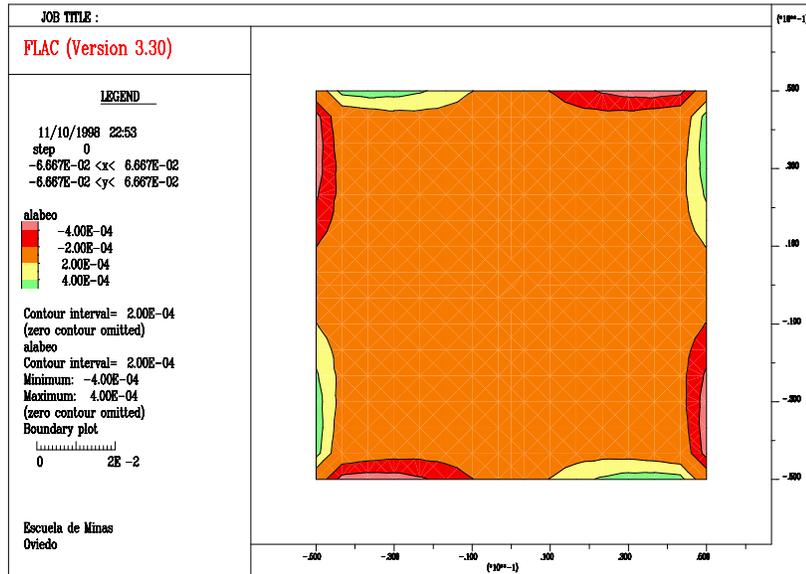


fig. 19 Sección cuadrada: Alabeo.

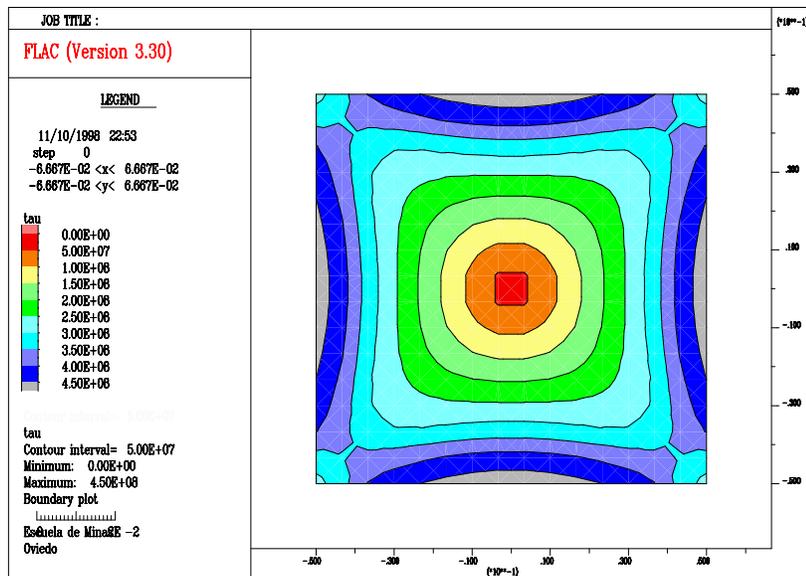


fig. 20 Sección cuadrada: Cortante.

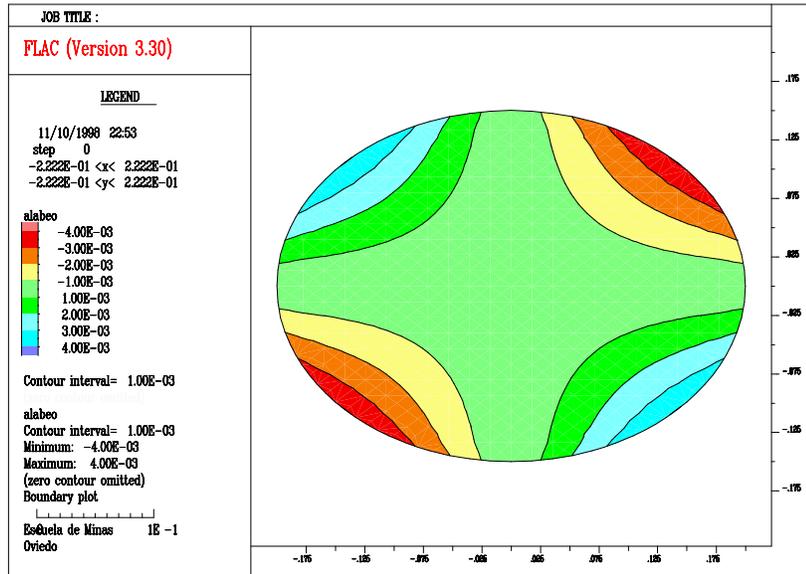


fig. 21 Sección elíptica: Alabeo.

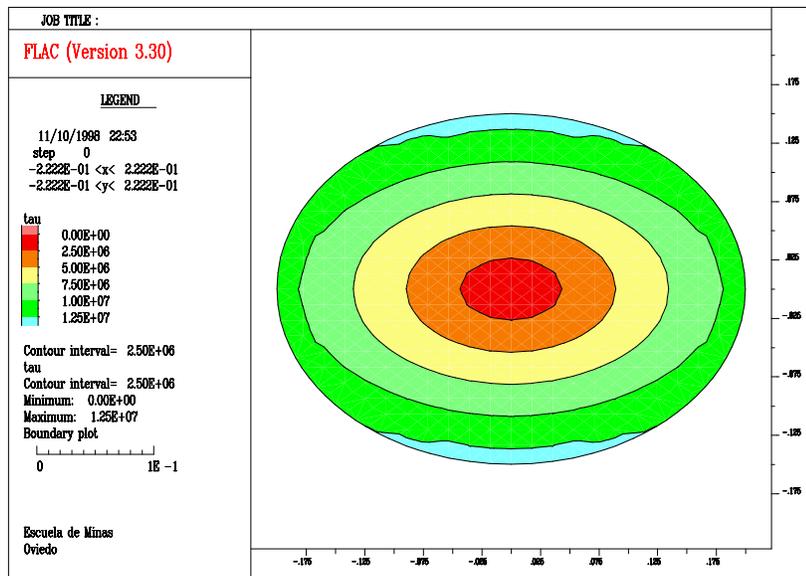


fig. 22 Sección elíptica: Cortante.

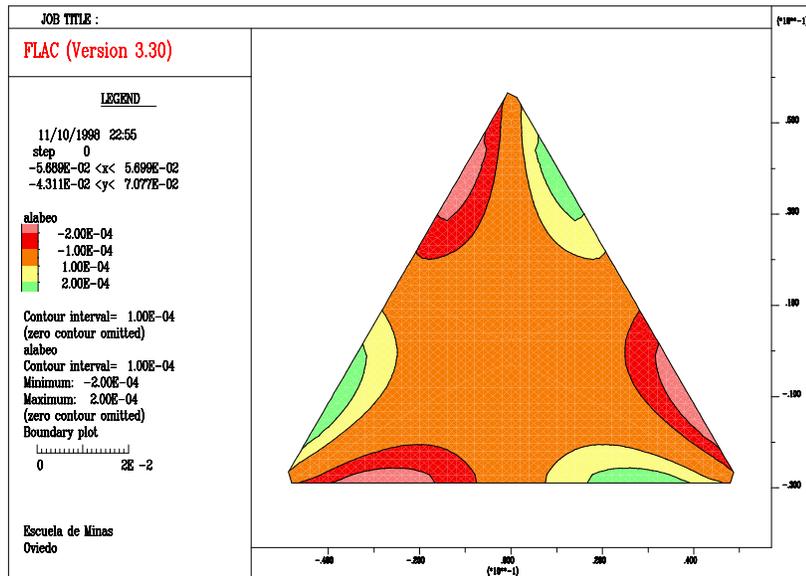


fig. 23 Sección triangular: Alabeo.

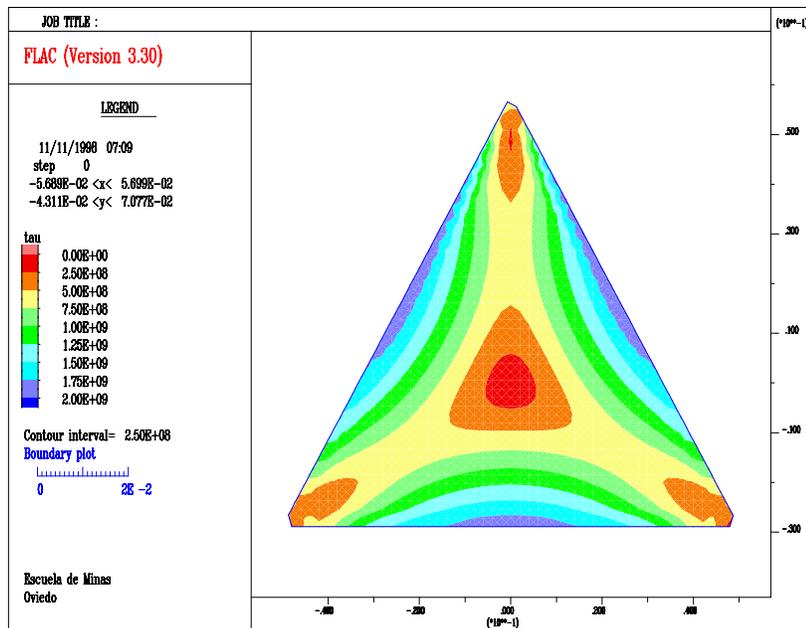


fig. 24 Sección triangular: Cortante.

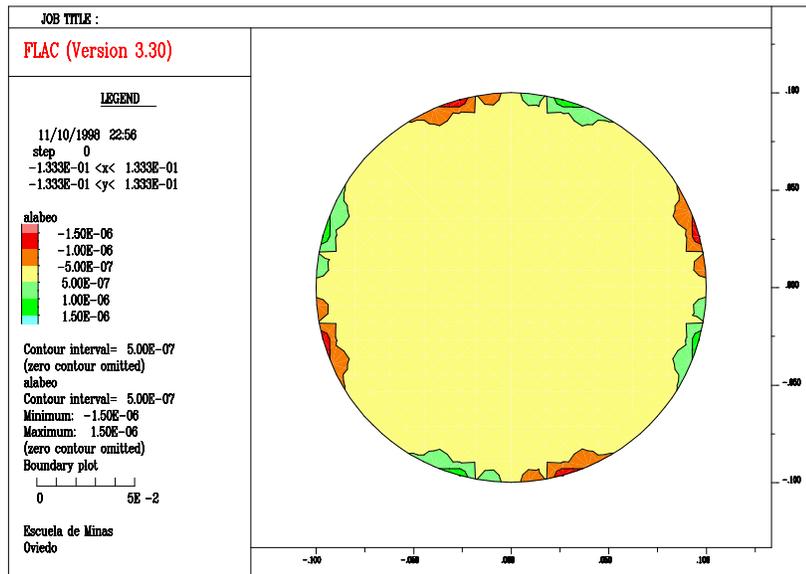


fig. 25 Sección circular: Alabeo.

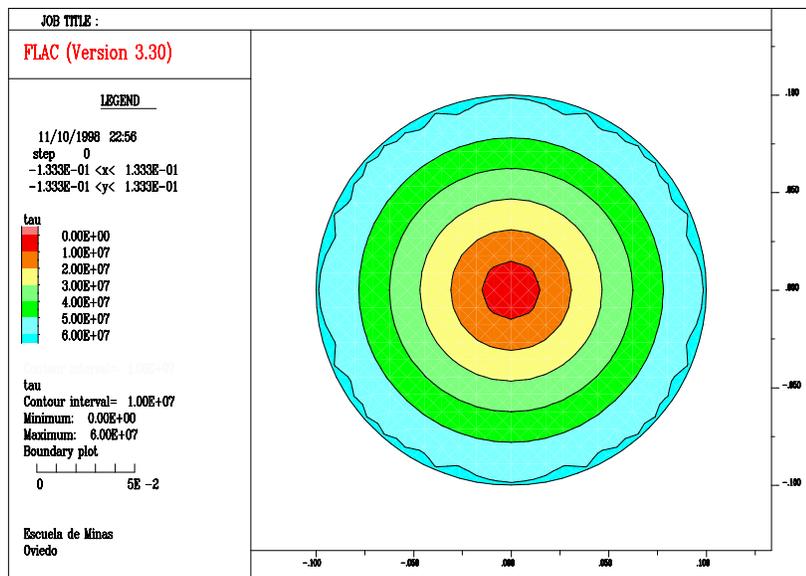


fig. 26 Sección circular: Cortante.

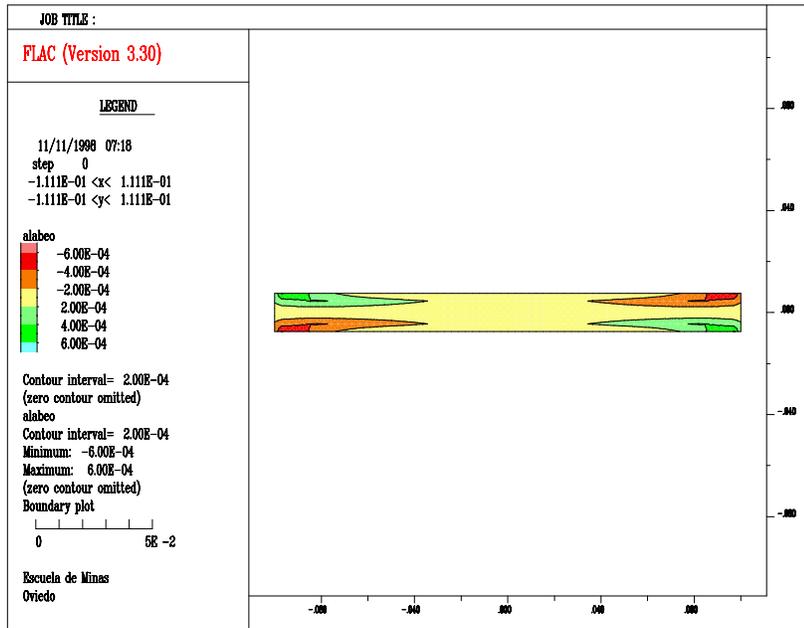


fig. 27 Fleje: Alabeo.

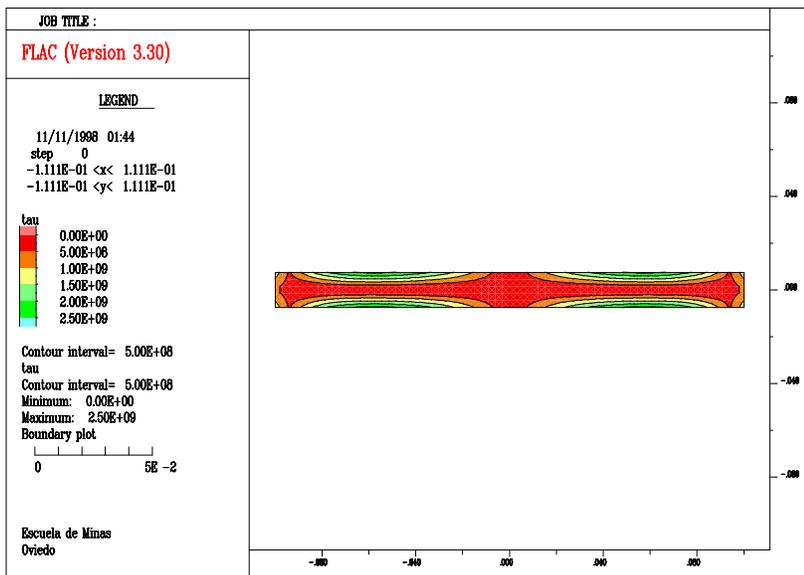


fig. 28 Fleje: Cortante.

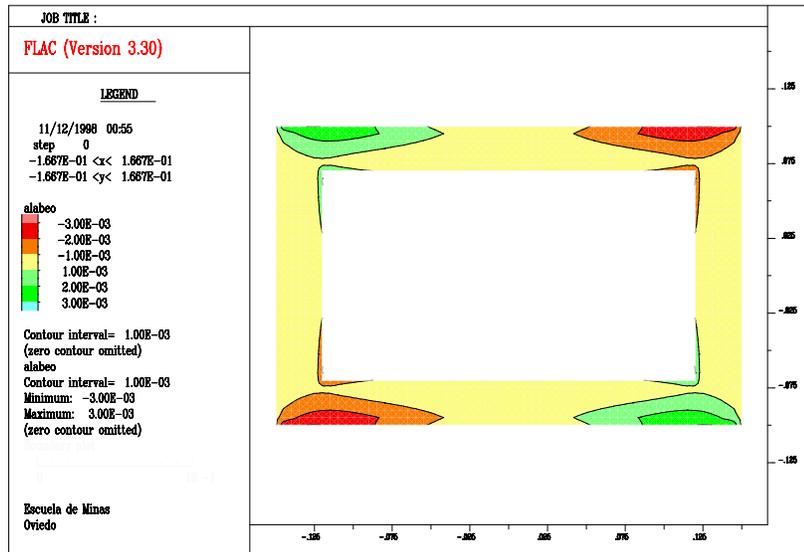


fig. 29 Perfil delgado cerrado: Alabeo.

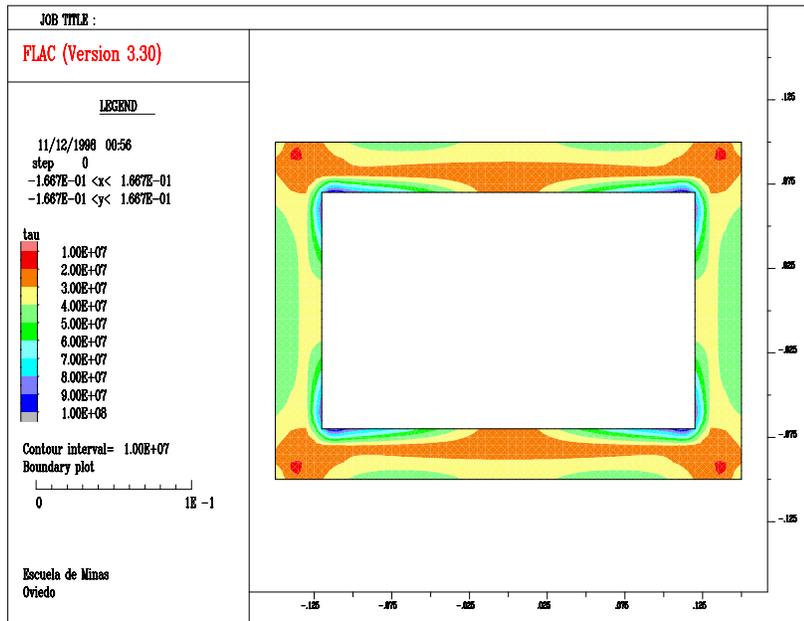


fig. 30 Perfil delgado cerrado: Cortante.

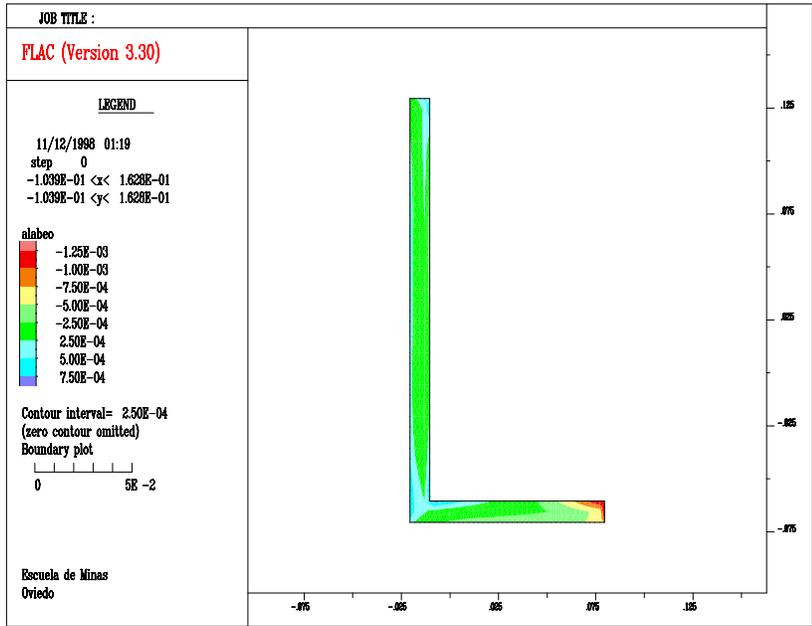


fig. 31 Perfil L: Alabeo.

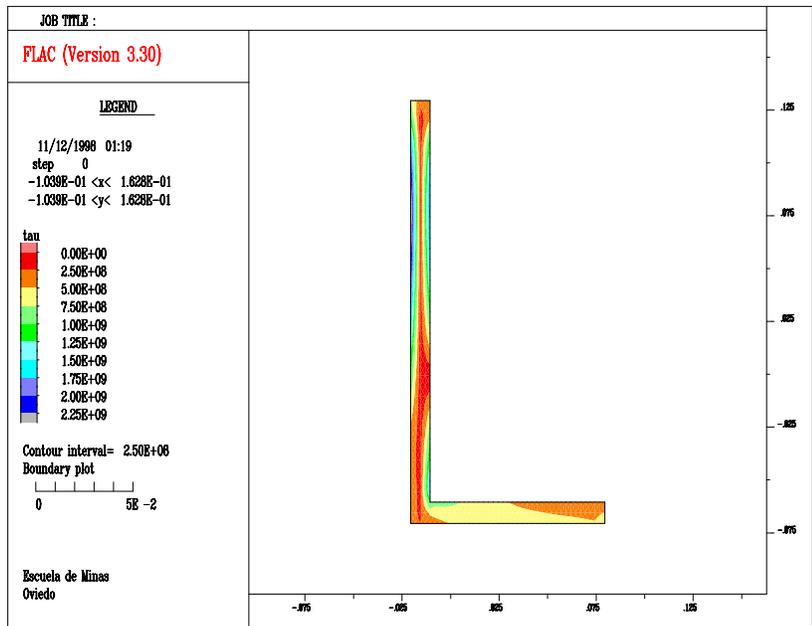


fig. 32 Perfil L: Cortante.

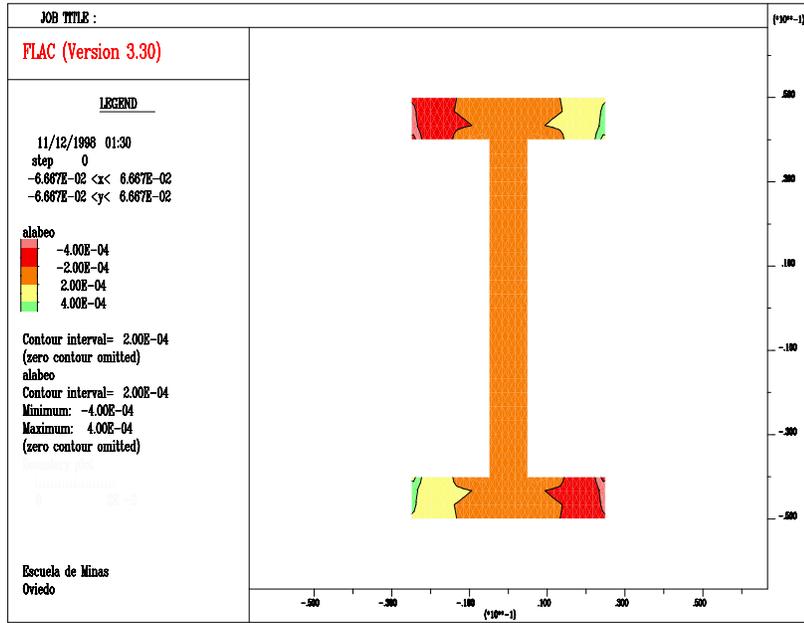


fig. 33 Perfil IPE: Alabeo.

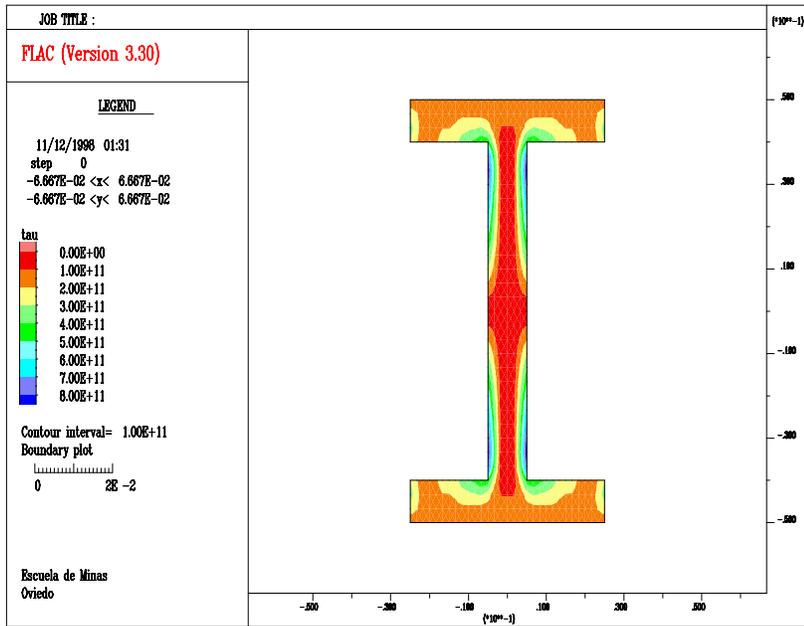


fig. 34 Perfil IPE: Cortante.



## **6 CONCLUSIONES.**

El análisis de resultados obtenidos mediante elementos de contorno frente a la formulación clásica ha llevado a las siguientes conclusiones:

1. La formulación clásica establece la ausencia de cargas exteriores sobre la superficie lateral de la barra en contradicción con las condiciones de contorno.
2. Las condiciones de contorno llevan a definir la torsión uniforme como aquella que produce una proyección ortogonal de la sección deformada coincidente con la sección no deformada y con un ángulo de giro de la sección transversal directamente proporcional a la longitud del cilindro. Definición distinta a la formulación clásica donde se establece la torsión uniforme como aquella que produce una deformada plana y considera el ángulo de torsión inversamente proporcional al momento polar de inercia de la sección transversal.

La validación del test realizado lleva a establecer:

1. Que el proceso es válido para secciones cerradas y dominios simplemente conexos, siendo determinante la finura de mallado en aquellas secciones donde una de las dimensiones de los lados es muy pequeña respecto de la otra.
2. Que el proceso es válido en secciones cerrados múltiplemente conexas y perfiles abiertos de pared delgada. En este caso es determinante la presencia de fuertes cortantes en las esquinas de las secciones y a la finura de mallado.



## 7 CÓDIGO DEL PROGRAMA “TORSIÓN”.

A continuación se indica el código del programa desarrollado, para el estudio de la torsión uniforme.

```
set mess off echo off
config extra 10
;
def generar
;
nombre = 'torsi_'+string(test)+'.sav'
xmin = 1e20
xmax = -1e20
ymin = 1e20
ymax = -1e20
loop i (1,n_tra + 1)
if xtable(1,i) < xmin then
  xmin = xtable(1,i)
end_if
if xtable(1,i) > xmax then
  xmax = xtable(1,i)
end_if
if ytable(1,i) < ymin then
  ymin = ytable(1,i)
end_if
if ytable(1,i) > ymax then
  ymax = ytable(1,i)
end_if
end_loop
;
delta_x = xmax - xmin
delta_y = ymax - ymin
if factor = 1.
if delta_x <= delta_y
  j_z = int(delta_y/delta_x*i_z)
else
  j_z = i_z
  i_z = int(delta_x/delta_y*j_z)
end_if
else
  j_z = i_z
end_if
if p_ec = 0
  p_ec = 1.
end_if
l_ec = float(delta_x/(p_ec*i_z))
```



```
if factor = 0. then
  f_mul = float(i_z/5.)
else
  delta_x = 0.
  delta_y = 0.
  f_mul = 1.
end_if
xmin = xmin - delta_x/f_mul
xmax = xmax + delta_x/f_mul
ymin = ymin - delta_y/f_mul
ymax = ymax + delta_y/f_mul
;
i_gp = i_z + 1
j_gp = j_z + 1
recoloca
command
  gr i_z j_z
  mo el
  set mech off
  gen xmin ymin xmin ymax xmax ymax xmax ymin
  gen table 2
  mark i 1
  mark j 1
  mark i i_gp
  mark j j_gp
end_command
if factor = 0
  command
    mo nul reg 1 1
  end_command
end_if
;
if factor = 2
  jnu = int(j_z/2)
  command
    mo nul reg 1 jnu
    mo nul reg i_z jnu
  end_command
end_if
;
if factor = 3
  inu = int(i_z/2)
  jnu = int(j_z/2)
  command
    mo nul reg inu jnu
  end_command
end_if
;
```



```
if factor = 4
  command
  mo nul reg i_z j_z
end_command
end_if
;
if n_fri = 1
  relocal
  command
  gen table 4
end_command
;
minimo = 1e20
loop i (1,i_gp)
  loop j (1,j_gp)
    if and(flags(i,j),8)=0
      dista = sqrt((x(i,j)-x_int)^2+(y(i,j)-y_int)^2)
      if dista < minimo
        minimo = dista
        inul = i
        jnul = j
      end_if
    end_if
  end_loop
end_loop
;
command
  mo nul reg inul jnul
end_command
end_if
;
end
;
def calcucdg
;
  x_g = 0.
  y_g = 0.
  a_sec = 0.
;
  loop i (1,i_z)
    loop j (1,j_z)
      xx = .25*(x(i,j)+x(i+1,j)+x(i+1,j+1)+x(i,j+1))
      yy = .25*(y(i,j)+y(i+1,j)+y(i+1,j+1)+y(i,j+1))
      x_g = x_g + area(i,j)*xx
      y_g = y_g + area(i,j)*yy
      a_sec = a_sec + area(i,j)
    end_loop
  end_loop
end_if
```



```
;
x_g = -x_g/a_sec
y_g = -y_g/a_sec
;
command
ini x add x_g y add y_g
end_command
;
loop i (1,necoe)
dd = p_eco + 4*(i-1)
loop j (1,2)
fmem(dd+2*j-2) = fmem(dd+2*j-2) + x_g
fmem(dd+2*j-1) = fmem(dd+2*j-1) + y_g
end_loop
end_loop
;
loop i (1,necoi)
dd = p_eci + 4*(i-1)
loop j (1,2)
fmem(dd+2*j-2) = fmem(dd+2*j-2) + x_g
fmem(dd+2*j-1) = fmem(dd+2*j-1) + y_g
end_loop
end_loop
;
x_g = 0.
y_g = 0.
;
end
;
def recoloca
;
necoe = 0 ;n§ de elementos
;
loop i (1,n_tra) ;bucle a tramos contorno
x1 = xtable(1,i)
y1 = ytable(1,i)
x2 = xtable(1,i+1)
y2 = ytable(1,i+1)
l_tra = sqrt((x1-x2)^2+(y1-y2)^2) ;longitud del tramo
n_etra = int(l_tra/l_ec) ;n§ elementos en tramo
if n_etra = 0
n_etra = 1
end_if
necoe = necoe + n_etra
end_loop
;
p_eco = get_mem(4*necoe) ;puntero a E.C.
;
```



```
n_ec = 0
loop i (1,n_tra)                                ;bucle a tramos contorno
  x1 = xtable(1,i)
  y1 = ytable(1,i)
  x2 = xtable(1,i+1)
  y2 = ytable(1,i+1)
  l_tra = sqrt((x1-x2)^2+(y1-y2)^2)            ;longitud del tramo
  n_etra = int(l_tra/l_ec)                     ;nº elementos en tramo
  if n_etra = 0
    n_etra = 1
  end_if
  d_x = float((x2-x1)/n_etra)
  d_y = float((y2-y1)/n_etra)
  loop k (1,n_etra)
    n_ec = n_ec + 1
    x1j = x1 + (k-1)*d_x
    y1j = y1 + (k-1)*d_y
    x2j = x1j + d_x
    y2j = y1j + d_y
    dd = p_eco + 4*(n_ec-1)
    fmem(dd + 0) = x1j
    fmem(dd + 1) = y1j
    fmem(dd + 2) = x2j
    fmem(dd + 3) = y2j
  end_loop
end_loop
;
loop i (1,necoe)
  dd = p_eco + 4*(i-1)
  if i = 1
    xtable(2,i) = fmem(dd+0)
    ytable(2,i) = fmem(dd+1)
  end_if
  xtable(2,i+1) = fmem(dd+2)
  ytable(2,i+1) = fmem(dd+3)
end_loop
;
end
;
def recolocal
;
necoi = 0
;
loop i (1,n_tri)                                ;bucle a tramos contorno int
  x1 = xtable(3,i)
  y1 = ytable(3,i)
  x2 = xtable(3,i+1)
  y2 = ytable(3,i+1)
```



```
l_tra = sqrt((x1-x2)^2+(y1-y2)^2)           ;longitud del tramo
n_etra = int(l_tra/l_ec)                   ;n§ elementos en tramo
if n_etra = 0
  n_etra = 1
end_if
necoi = necoi + n_etra
end_loop
;
p_eci = get_mem(4*necoi)                   ;puntero a E.C. interiores
;
n_ec = 0
loop i (1,n_tri)                           ;bucle a tramos contorno int
  x1 = xtable(3,i)
  y1 = ytable(3,i)
  x2 = xtable(3,i+1)
  y2 = ytable(3,i+1)
  l_tra = sqrt((x1-x2)^2+(y1-y2)^2)       ;longitud del tramo
  n_etra = int(l_tra/l_ec)                 ;n§ elementos en tramo
  if n_etra = 0
    n_etra = 1
  end_if
  d_x = float((x2-x1)/n_etra)
  d_y = float((y2-y1)/n_etra)
  loop k (1,n_etra)
    n_ec = n_ec + 1
    x1j = x1 + (k-1)*d_x
    y1j = y1 + (k-1)*d_y
    x2j = x1j + d_x
    y2j = y1j + d_y
    dd = p_eci + 4*(n_ec-1)
    fmem(dd + 0) = x1j
    fmem(dd + 1) = y1j
    fmem(dd + 2) = x2j
    fmem(dd + 3) = y2j
  end_loop
end_loop
;
loop i (1,necoi)
  dd = p_eci + 4*(i-1)
  if i = 1
    xtable(4,i) = fmem(dd+0)
    ytable(4,i) = fmem(dd+1)
  end_if
  xtable(4,i+1) = fmem(dd+2)
  ytable(4,i+1) = fmem(dd+3)
end_loop
;
end
```



```
;
def elecon
;
xj0 = .5*(xj1+xj2)           ;X punto medio
yj0 = .5*(yj1+yj2)           ;Y punto medio
l_j = yj2 - yj1               ;X normal exterior
m_j = xj1 - xj2               ;Y normal exterior
ljj = sqrt(l_j*l_j+m_j*m_j)   ;longitud elemento
l_j = l_j/ljj                 ;X normal unitario
m_j = m_j/ljj                 ;Y normal unitario
dij = ((xi0-xj0)^2+(yi0-yj0)^2) ;d^2 (i,j)
if dij <= 0.
  exit
end_if
lnd = ln(dij)                  ;log. neperiano(dij)
dfn = - xj0*m_j + yj0*l_j     ;derivada normal
qij = -.5*dfn*lnd*ljj         ;contrib. 2§ miembro
h = (xi0-xj0)*l_j+(yi0-yj0)*m_j ;aux. derivadas
;
end
;
def matriz_hq
;
necon = necoe + necoi
p_mat = get_mem(necon*(necon+1)) ;puntero matriz H]Q
p_x = get_mem(necon)           ;punt. a sol. en contorno
p_c = get_mem(necon+1)        ;permutador de columna
;
loop i (1,necon)               ;Bucle elementos
  if i <= necoe
    p_ccc = p_eco
    ii = i
  else
    p_ccc = p_eci
    ii = i - necoe
  end_if
  xi1 = fmem(p_ccc+4*(ii-1)+0) ;X origen elemento
  yi1 = fmem(p_ccc+4*(ii-1)+1) ;Y origen elemento
  xi2 = fmem(p_ccc+4*(ii-1)+2) ;X extremo elemento
  yi2 = fmem(p_ccc+4*(ii-1)+3) ;Y extremo elemento
  xi0 = .5*(xi1+xi2)           ;X punto medio
  yi0 = .5*(yi1+yi2)           ;Y punto medio
  q_i = 0.                     ;inicializa 2§ miembro
  dii = p_mat + (i-1)*(necon+1) + i - 1 ;puntero a H_ii
  fmem(dii) = pi                ;H_ii = 3.1416....
  loop j (1,necon)             ;Bucle elementos
    if i # j                    ;j # i
      if j <= necoe
```



```
p_eee = p_eco
signo = 1.
jj = j
else
p_eee = p_eci
signo = -1.
jj = j - necoe
end_if
xj1 = fmem(p_eee+4*(jj-1)+0) ;X origen elemento
yj1 = fmem(p_eee+4*(jj-1)+1) ;Y origen elemento
xj2 = fmem(p_eee+4*(jj-1)+2) ;X extremo elemento
yj2 = fmem(p_eee+4*(jj-1)+3) ;Y extremo elemento
elecon
q_i = q_i + signo*qij ;2§ miembro
d_j = p_mat + (i-1)*(necon+1) + j - 1 ;puntero a H_ij
fmem(d_j) = -h*ljj/dij*signo ;elemento H_ij
end_if
end_loop
dis = p_mat + (i-1)*(necon+1) + necon ;puntero a Q_i
fmem(dis) = q_i ;se almacena Q_i
end_loop
;
end
;
def gauss
;
p_a = p_mat
n = necon
loop i (1,n+1)
imem(p_c+i-1) = i
end_loop
;
loop p (1,necon-1)
d1 = p_a + (n+1)*(p-1) + imem(p_c+p-1) - 1
pivote = fmem(d1)
tt = p
loop h (p+1,n)
k_k = imem(p_c+h-1)
d2 = p_a + (n+1)*(p-1) + k_k - 1
if abs(fmem(d2)) > pivote
pivote = fmem(d2)
tt = h
end_if
end_loop
ll = imem(p_c+p-1)
imem(p_c+p-1) = imem(p_c+tt-1)
imem(p_c+tt-1) = ll
if abs(pivote) < 1e-8
```



```
xx = out('MATRIZ SINGULAR: REVISE SUS DATOS')
saca = 0
exit
end_if
loop k (1,n+1)
d2 = p_a + (n+1)*(p-1) + k - 1
fmem(d2) = fmem(d2)/pivote
end_loop
loop c (p+1,n)
p_p = imem(p_c+p-1)
cabeza = fmem(p_a + (n+1)*(c-1) + p_p - 1)
loop k (1,n+1)
k_k = imem(p_c+k-1)
d2 = p_a + (n+1)*(p-1) + k_k - 1
d3 = p_a + (n+1)*(c-1) + k_k - 1
fmem(d3) = fmem(d3) - fmem(d2)*cabeza
end_loop
end_loop
end_loop
;
n_n = imem(p_c+n-1)
if abs(fmem(p_a+(n+1)*(n-1)+n_n-1)) < 1e-8
xx = out('MATRIZ SINGULAR: REVISE SUS DATOS')
saca = 0
exit
end_if
;
d1 = p_a + (n+1)*(n-1) + n
d2 = p_a + (n+1)*(n-1) + n_n - 1
fmem(p_x+n_n-1) = fmem(d1)/fmem(d2)
;
loop j (1,n-1)
k = n-j
suma = 0.
loop c (k+1,n)
c_c = imem(p_c+c-1)
d1 = p_a + (n+1)*(k-1) + c_c - 1
suma = suma + fmem(d1)*fmem(p_x+c_c-1)
end_loop
k_k = imem(p_c+k-1)
d2 = p_a + (n+1)*(k-1) + n
d3 = p_a + (n+1)*(k-1) + k_k - 1
fmem(p_x+k_k-1) = (fmem(d2)-suma)/fmem(d3)
end_loop
;
end
;
def calcinte
```



```
;
loop k (1,i_z+1)
loop l (1,j_z+1)
if and(flags(k,l),8) = 0
xi0 = x(k,l)
yi0 = y(k,l)
q_i = 0.
h_i = 0.
loop j (1,necon)
dd = p_x + imem(p_c+j-1) - 1
fi_j = fmem(dd) ;Valor de fi contorno
if j <= necoe
p_ccc = p_eco
signo = 1.
jj = j
else
p_ccc = p_eci
signo = -1.
jj = j - necoe
end_if
xj1 = fmem(p_ccc+4*(jj-1)+0) ;X origen elemento
yj1 = fmem(p_ccc+4*(jj-1)+1) ;Y origen elemento
xj2 = fmem(p_ccc+4*(jj-1)+2) ;X extremo elemento
yj2 = fmem(p_ccc+4*(jj-1)+3) ;Y extremo elemento
elecon
if dij # 0.
q_i = q_i + qij*signo
h_i = h_i - fi_j*h*1jj/dij*signo
end_if
end_loop
if and(flags(k,l),128) = 0
alfa = 2.*pi
else
alfa = pi
end_if
ex_1(k,l) = (h_i + q_i)/alfa ;alabeo en (k,l)
end_if
end_loop
end_loop
;
end
;
def derivala
;
j_tor = 0.
loop i (1,i_z)
loop j (1,j_z)
if model(i,j) > 1 then
```



```
a_rea = area(i,j)
v_1 = ex_1(i,j)
v_2 = ex_1(i+1,j)
v_3 = ex_1(i+1,j+1)
v_4 = ex_1(i,j+1)
x1 = x(i,j)
x2 = x(i+1,j)
x3 = x(i+1,j+1)
x4 = x(i,j+1)
y1 = y(i,j)
y2 = y(i+1,j)
y3 = y(i+1,j+1)
y4 = y(i,j+1)
nx1 = y2 - y1
nx2 = y3 - y2
nx3 = y4 - y3
nx4 = y1 - y4
ny1 = x1 - x2
ny2 = x2 - x3
ny3 = x3 - x4
ny4 = x4 - x1
l_1 = sqrt(nx1*nx1 + ny1*ny1)
l_2 = sqrt(nx2*nx2 + ny2*ny2)
l_3 = sqrt(nx3*nx3 + ny3*ny3)
l_4 = sqrt(nx4*nx4 + ny4*ny4)
nx1 = nx1/l_1
ny1 = ny1/l_1
nx2 = nx2/l_2
ny2 = ny2/l_2
nx3 = nx3/l_3
ny3 = ny3/l_3
nx4 = nx4/l_4
ny4 = ny4/l_4
suma1 = (v_1 + v_2)*nx1*l_1
suma2 = (v_2 + v_3)*nx2*l_2
suma3 = (v_3 + v_4)*nx3*l_3
suma4 = (v_4 + v_1)*nx4*l_4
ex_3(i,j) = 1./(2.*a_rea)*(suma1+suma2+suma3+suma4)
suma1 = (v_1 + v_2)*ny1*l_1
suma2 = (v_2 + v_3)*ny2*l_2
suma3 = (v_3 + v_4)*ny3*l_3
suma4 = (v_4 + v_1)*ny4*l_4
ex_4(i,j) = 1./(2.*a_rea)*(suma1+suma2+suma3+suma4)
x0 = .25*(x(i,j)+x(i+1,j)+x(i+1,j+1)+x(i,j+1))
y0 = .25*(y(i,j)+y(i+1,j)+y(i+1,j+1)+y(i,j+1))
aux = x0^2 + y0^2 + x0*ex_4(i,j) - y0*ex_3(i,j)
j_tor = j_tor + aux*a_rea
end_if
```



```
end_loop
end_loop
;
end
;
def cortante
;
tau_max = -1e20
;
loop i (1,i_z)
loop j (1,j_z)
if model(i,j) > 1 then
xx = .25*(x(i,j)+x(i+1,j)+x(i+1,j+1)+x(i,j+1))
yy = .25*(y(i,j)+y(i+1,j)+y(i+1,j+1)+y(i,j+1))
xx = xx - x_g
yy = yy - y_g
ex_5(i,j) = m_tor/j_tor*(ex_3(i,j)-yy)
ex_6(i,j) = m_tor/j_tor*(ex_4(i,j)+xx)
ex_7(i,j) = sqrt(ex_5(i,j)^2+ex_6(i,j)^2)
if ex_7(i,j) > tau_max
tau_max = ex_7(i,j)
it_m = i
jt_m = j
end_if
end_if
end_loop
end_loop
;
w_w = m_tor/tau_max
eta = a_sec/w_w
;
end
;
def alabemax
;
alamax = -1e20
loop i (1,i_gp)
loop j (1,j_gp)
if and(flags(i,j),8) = 0
if ex_1(i,j) > alamax
alamax = ex_1(i,j)
ia_m = i
ja_m = j
end_if
end_if
end_loop
end_loop
;
;
```



```
end
;
def lee_elemcoe
;
xx = out(' ')
xx = out(' ')
xx = out(' ELEMENTOS DEL CONTORNO EXTERIOR ')
xx =
out('=====
==')
xx = out('Numero Origen Extremo ')
xx = out('----- ')
loop i (1,necoe)
if i < 10
tira0 = ' '+string(i)
else
if i < 100
tira0 = ' '+string(i)
else
tira0 = ' '+string(i)
end_if
end_if
x0 = fmem(p_eco+4*(i-1))
y0 = fmem(p_eco+4*(i-1)+1)
x1 = fmem(p_eco+4*(i-1)+2)
y1 = fmem(p_eco+4*(i-1)+3)
tira1 = ' ('+string(x0)+','+string(y0)+') '
tira2 = ' ('+string(x1)+','+string(y1)+') '
tira = tira0+tira1+tira2
xx = out(string(tira))
cuenta = cuenta + 1
if cuenta = 19
xx = in('/.../')
xx = out(' ELEMENTOS DEL CONTORNO EXTERIOR ')
xx =
out('=====
==')
xx = out('Numero Origen Extremo ')
xx = out('----- ')
cuenta = 0
end_if
end_loop
xx = out('----- ')
xx = out(' ')
xx = out(' ')
;
end
;
```



```
def lee_elemcoi
;
xx = out(' ')
xx = out(' ')
xx = out('          ELEMENTOS DEL CONTORNO INTERIOR          ')
xx =
out('=====
==')
xx = out('Numero          Origen          Extremo ')
xx = out('----- ')
loop i (1,necoi)
if i < 10
tira0 = ' '+string(i)
else
if i < 100
tira0 = ' '+string(i)
else
tira0 = ' '+string(i)
end_if
end_if
x0 = fmem(p_eci+4*(i-1))
y0 = fmem(p_eci+4*(i-1)+1)
x1 = fmem(p_eci+4*(i-1)+2)
y1 = fmem(p_eci+4*(i-1)+3)
tira1 = ' ('+string(x0)+','+string(y0)+') '
tira2 = ' ('+string(x1)+','+string(y1)+') '
tira = tira0+tira1+tira2
xx = out(string(tira))
cuenta = cuenta + 1
if cuenta = 19
xx = in('/.../')
xx = out('          ELEMENTOS DEL CONTORNO INTERIOR          ')
xx =
out('=====
==')
xx = out('Numero          Origen          Extremo ')
xx = out('----- ')
cuenta = 0
end_if
end_loop
xx = out('----- ')
xx = out(' ')
xx = out(' ')
;
end
;
def lee_elemcon
;
;
```



```
lee_elemcoe
lee_elemcoi
;
end
;
def leesol
;
xx = out(' ')
xx = out(' ')
xx = out(' ')
xx = out(' SOLUCION DEL SISTEMA ')
xx = out('=====')
xx = out(' ')
loop i (1,n)
i_i = imem(p_c+i-1)
dd = p_x + i_i - 1
xx = out('X'+string(i_i)+' = '+string(fmем(dd)))
cuenta = cuenta + 1
if cuenta = 19
xx = in('/.../')
xx = out(' SOLUCION DEL SISTEMA ')
xx = out('=====')
cuenta = 0
end_if
end_loop
xx = out(' ')
xx = out('=====')
xx = out(' ')
xx = out(' ')
xx = out(' ')
;
end
;
def leematri
;
loop i (1,necoe)
sacafila
end_loop
;
end
;
def sacafila
;
xx = in('Desea sacar la fila '+string(i)+ ' de la matriz?:')
loop j (1,necoe+1)
dd = p_mat + (necoe+1)*(i-1) + j - 1
xx = out(string(fmем(dd)))
end_loop

```



```
;
end
;
def leecolu
;
loop i (1,n)
dd = p_c + i - 1
xx = out('Columna '+string(i)+' = '+string(imem(dd)))
end_loop
;
end
;
def utiles
;
xx = out('  UTILES DEL PROGRAMA DE TORSION UNIFORME      ')
xx =
out('=====')
=='')
xx = out(' Comando          Descripcion          ')
xx = out('-----')
xx = out(' ')
xx = out(' lee_elemcon      Listado de elementos de contorno  ')
xx = out(' resultados      Resumen de valores importantes  ')
xx = out(' alabeo          Representacion grafica:alabeo      ')
xx = out(' tauxz          Representacion grafica: Tau_xz      ')
xx = out(' tauyz          Representacion grafica: Tau_yz      ')
xx = out(' tau            Representacion grafica: Tau      ')
xx = out(' deformada      Representacion grafica: Deformada  ')
xx = out(' ')
xx = out('-----')
;
end
;
def resultados
;
xcm = x(it_m,jt_m)
ycm = y(it_m,jt_m)
tira = 'en ('+string(xcm)+','+string(ycm)+')'
xca = x(ia_m,ja_m)
yca = y(ia_m,ja_m)
tir1 = 'en ('+string(xca)+','+string(yca)+')'
xx = out(' ')
xx = out(' ')
xx = out(' ')
xx = out(' ')
xx = out('-----')
xx = out('  RESULTADOS DEL ANALISIS DE TORSION UNIFORME(S.I.)  ')
```



```
xx =
out('=====')
=====')
xx = out(' ')
xx = out(' Momento torsor(Mt) = '+string(m_tor))
xx = out(' Modulo de Torsion(Jt) = '+string(j_tor))
xx = out(' Modulo de Cortante (G) = '+string(m_she))
xx = out(' Torsion/metro = '+string(m_tor/(m_she*j_tor)))
xx = out(' Area Seccion (A) = '+string(a_sec))
xx = out(' Alabeo maximo = '+string(alamax)+string(tir1))
xx = out(' Cortante maximo = '+string(tau_max)+string(tira))
xx = out(' W (Mt/Cortante_maximo) = '+string(w_w))
xx = out(' Rendimiento (A/W) = '+string(eta))
xx = out(' ')
xx = out('-----')
xx = out(' ')
xx = out(' ')
xx = out(' ')
xx = out(' ')
;
end
;
def pintatau
;
loop i (1,i_gp)
loop j (1,j_gp)
if and(flags(i,j),8)=0 then
if i=1 then
if j=1 then
ex_8(i,j)=ex_5(i,j)
ex_9(i,j)=ex_6(i,j)
ex_10(i,j)=ex_7(i,j)
else
if j=j_gp then
ex_8(i,j)=ex_5(i,j-1)
ex_9(i,j)=ex_6(i,j-1)
ex_10(i,j)=ex_7(i,j-1)
else
if ex_7(i,j-1)*ex_7(i,j)#0 then
ex_8(i,j)=.5*(ex_5(i,j-1)+ex_5(i,j))
ex_9(i,j)=.5*(ex_6(i,j-1)+ex_6(i,j))
ex_10(i,j)=.5*(ex_7(i,j-1)+ex_7(i,j))
else
ex_8(i,j)=ex_5(i,j-1)+ex_5(i,j)
ex_9(i,j)=ex_6(i,j-1)+ex_6(i,j)
ex_10(i,j)=ex_7(i,j-1)+ex_7(i,j)
end_if
end_if
end_if
```



```
end_if
else
if i=igp then
if j=1 then
ex_8(i,j)=ex_5(i-1,j)
ex_9(i,j)=ex_6(i-1,j)
ex_10(i,j)=ex_7(i-1,j)
else
if j=jgp then
ex_8(i,j)=ex_5(i-1,j-1)
ex_9(i,j)=ex_6(i-1,j-1)
ex_10(i,j)=ex_7(i-1,j-1)
else
if ex_7(i-1,j-1)*ex_7(i-1,j)#0 then
ex_8(i,j)=.5*(ex_5(i-1,j-1)+ex_5(i-1,j))
ex_9(i,j)=.5*(ex_6(i-1,j-1)+ex_6(i-1,j))
ex_10(i,j)=.5*(ex_7(i-1,j-1)+ex_7(i-1,j))
else
ex_8(i,j)=ex_5(i-1,j-1)+ex_5(i-1,j)
ex_9(i,j)=ex_6(i-1,j-1)+ex_6(i-1,j)
ex_10(i,j)=ex_7(i-1,j-1)+ex_7(i-1,j)
end_if
end_if
end_if
else
if j=1 then
if ex_7(i-1,j)*ex_7(i,j)#0 then
ex_8(i,j)=.5*(ex_5(i-1,j)+ex_5(i,j))
ex_9(i,j)=.5*(ex_6(i-1,j)+ex_6(i,j))
ex_10(i,j)=.5*(ex_7(i-1,j)+ex_7(i,j))
else
ex_8(i,j)=ex_5(i-1,j)+ex_5(i,j)
ex_9(i,j)=ex_6(i-1,j)+ex_6(i,j)
ex_10(i,j)=ex_7(i-1,j)+ex_7(i,j)
end_if
else
if j=jgp then
if ex_7(i-1,j-1)*ex_7(i,j-1)#0 then
ex_8(i,j)=.5*(ex_5(i-1,j-1)+ex_5(i,j-1))
ex_9(i,j)=.5*(ex_6(i-1,j-1)+ex_6(i,j-1))
ex_10(i,j)=.5*(ex_7(i-1,j-1)+ex_7(i,j-1))
else
ex_8(i,j)=ex_5(i-1,j-1)+ex_5(i,j-1)
ex_9(i,j)=ex_6(i-1,j-1)+ex_6(i,j-1)
ex_10(i,j)=ex_7(i-1,j-1)+ex_7(i,j-1)
end_if
else
rr=0
```





```
end
;
def tau
;
command
pl ex_10 fil alias tau bo blac hold
end_command
;
end
;
def deformada
;
loop i (1,igp)
loop j (1,jgp)
if and(flags(i,j),8) = 0 then
xdisp(i,j) = - m_tor/(m_she*j_tor)*y(i,j)
ydisp(i,j) = m_tor/(m_she*j_tor)*x(i,j)
end_if
end_loop
end_loop
;
command
pl bo disp alias deformada iwhi hold
end_command
;
end
;
def resol
;
datos
generar
calcucdg
matriz_hq
gauss
calcinte
derivala
cortante
pintatau
alabemax
command
save @nombre
end_command
;
end
```



## **8 BIBLIOGRAFÍA.**

*El acero en la construcción.*

Editorial Reverté, S. A. 1972

*Construcciones metálicas.*

Vittorio Zignoli

Editorial Dossat, S. A. 1978

*Cálculo de estructuras.*

Ramón Argüelles Álvarez.

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Montes. Sección de Publicaciones. 1981.

*Mecánica de Materiales.*

James M. Gere; Stephen P. Timoshenko.

Grupo Editorial Iberoamérica. 1986

*Prontuario de estructuras metálicas.*

Ministerio de Fomento.

CEDEX. 1988

*Manuales sobre la construcción con acero.*

Publicaciones Ensidesa. 1990

*Resistencia de Materiales.*

Luis Berrocal.

Editorial McGraw-Hill. 1990



*Estructura de acero. Cálculo, Norma Básica y Eurocódigo.*

R. Argüelles Álvarez; R. Argüelles Bustillo; F. Arriaga Martitegui; J. R. Atienza Reales.

Bellisco, Ediciones Técnicas y Científicas. 1999